Dr. Ole Peter Smith

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

Curso:	Estatística
Data:	05/07/2018
Disciplina:	Cálculo Numúmerico
Pasta Resposta:	Prova I
Prova:	I

1. Arquivo resposta: N01.py. Considere as funções:

$$f_1(x) = e^{2x}, \quad f_2(x) = \cos x^2, \quad f_3(x) = \sin x^2, \quad f_4(x) = e^{-x^2}, \quad f_5(x) = e^{-x^3}$$

   (a) *1 pt*. Implemente, como funções Python, as funções e suas derivadas.

   (b) *1 pt*. Nos pontos $x = 1, 2, 3, 4, 5$, calcule a estimação numérica *asimétrica* (`d_f_1`), o resíduo absoluta e relativa, gerando uma tabela da seguinte forma:

x	f_5	f_n	r_a	r_r
1.000000	-1.103638	-1.103638	5.518987e-07	5.000721e-07
2.000000	-0.004026	-0.004026	2.213976e-08	5.499809e-06
3.000000	-0.000000	-0.000000	6.681564e-16	1.316635e-05
4.000000	-0.000000	-0.000000	1.828315e-31	2.374961e-05
5.000000	-0.000000	-0.000000	1.445262e-57	3.729886e-05

   (c) *1 pt*. Repita a questão anterior, mas usando a estimação *simétrica* (`d_f`).

2. Arquivo resposta: N02.py.

   (a) *1 pt*. Encontre o determinante e a inversa da matriz:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & 5 & 25 & -125 \end{pmatrix}$$

   Qual os resíduos absoluto e reltivo? Exibe (print) a matriz inversa.

   (b) *1 pt*. Dados o vetores:

$$\underline{\mathbf{b}}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{b}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{b}}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{b}}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Resolve as equações: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Em cada caso, calcule também os resíduos absoluto e relativo. Exibe (print) as soluções.

3. Arquivo resposta: N03.py.
   Dado os polinômios:

$$P_1(x) = x^2 + x + 1, \qquad P_2(x) = x^2 + x - 1, \qquad P_3(x) = x^2 + x + 2, \qquad P_4(x) = x^2 + x - 2$$

   (a) *1 pt*. Calcule e exibe (print) os polinômios: $P_i(x)^n$ para $n = 2, 3, 4, 5$. Veja o output abaixo.

$$P_1(x)^1 = 1.000000x**2 + 1.000000x + 1.000000$$

$$P_1(x)^2 = 1.000000x**4 + 2.000000x**3 + 3.000000x**2 + 2.000000x + 1.000000$$

$$P_1(x)^3 = 1.000000x**6+3.000000x**5+6.000000x**4+7.000000x**3+6.000000x**2+3.000000x+1.000000$$

$$P_1(x)^4 = ...$$

   (b) *1 pt*. Calcule os valores de $P_1(x) \cdot P_i(x), i = 0, 1, 2, 3$, nas abscissas $x = 1, 2, 3, 4, 5$, produzindo uma tabela da forma:

x	$P_1 \cdot P_1$	$P_1 \cdot P_2$	$P_1 \cdot P_3$	$P_1 \cdot P_4$
1.000000	9.000000	3.000000	12.000000	0.000000
2.000000	49.000000	35.000000	56.000000	28.000000

4. Arquivo resposta: N03.py.
   Dados os pontos abaixo:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	3	0	-5	-2	2	4	1	-3	1

   (a) *1 pt*. Calcule como polinômios (representados por listas), os interpoladores do Lagrange, $H_i(x)$, para $i = 0, ..., 8$.

   (b) *1 pt*. Calculos os valores, $H_i(x_j)$. Comentar os resultados.

   (c) *1 pt*. Calculo o polinômio interpolador de Lagrange, $P(x) = \sum_{i=0}^{8} y_i H_i(x)$ e seus valores, $P(x_j)$, $j = 0, ..., 8$. Comentar os resultados.

5. Arquivo resposta: N04.py. É possivel mostrar que:

$$(1): \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ... = \frac{\pi^2}{6}$$

Vale ainda:

$$(2): \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + ... = \frac{\pi^4}{90}$$

Gostariamos verificar estes resultados supreendentes. Pomos:

$$a_p = \frac{1}{n^{2p}}$$

E escrevemos a soma parcial:

$$s_p = \sum_{n=1}^{p} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_p,$$

e:

$$s = \lim_{p \to +\infty} s_p$$

Os resíduos absolutos e relativos são:

$$r_a = |s - s_p|, \qquad r_r = \left| \frac{s - s_p}{s} \right|$$

Observe o código abaixo:

```
from math import pi

def a_1(n):
    return 1.0/1.0*( n**2) )

def sum_1():
    return pi**2/6.0

def Partial(a,p):
    summ=0.0
    for n in range(1,n+1):
       summ+=a(n)
    return summ

sum_num=Partial(a_1,50)
sum_ana=sum_1()
```

(a) *1 pt.* Para verificar o resultado (1), gere um trecho de código que calcula as somas parciais para $p = [10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5]$, a soma proposta além dos resíduos absoluto relativo, veja a tabela abaixo.

p	n	s	s_n	r_a	r_r	π^{2p}/s_p
1	10	1.644934	1.549768	9.516634e-02	5.785419e-02	6.368441
1	100	1.644934	1.634984	9.950167e-03	6.048976e-03	6.036515
1	1000	1.644934	1.643935	9.995002e-04	6.076232e-04	6.003648
1	10000	1.644934	1.644834	9.999500e-05	6.078967e-05	6.000365
1	100000	1.644934	1.644924	9.999950e-06	6.079241e-06	6.000036

Até onde precisamos ir, para fazer o erro menor do que 10^{-6}? 10^{-8}? 10^{-10}?

(b) *1 pt.* Repita a questão anterior, mas verificando o resultado (2).

(c) *1 pt.* Seria natural suspeitar que vale uma fórmula do tipo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \frac{\pi^{2p}}{f(p)},$$

onde $f(p)$ é uma função com valores inteiros. Isolando $f(p)$:

$$f(p) = \frac{\pi^{2p}}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}}} \simeq \frac{\pi^{2p}}{s_n},$$

para algum n suficientemente grande. Encontre $f(3)$ e verifique que é inteiro.

(d) *1 pt.* Encontre $f(4)$ e $f(5)$ e verifique que também são inteiros. $f(6)$ é inteiro?

Em seus arquivos respostas, somente exibe os dados solicitados!

Somente será considerado provas de quem assinou a lista de frequência!!!