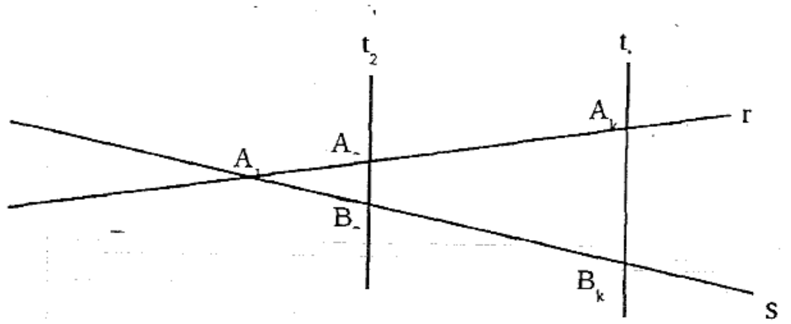
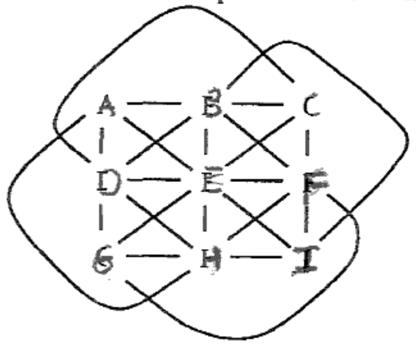


Um ponto delicado é provar que os pontos B_i são distintos (prove por absurdo). Em suma, até agora exibimos k pontos distintos em s. Isto prova o que queremos? Ainda não. Resta provar que, além desses k pontos, não existem outros pontos em s. Como? Segue uma demonstração por absurdo. Suponhamos que existe um outro ponto C em s, distinto dos B_i. Seja t uma reta paralela a t_2 passando por C (axioma P_1). Então t corta r (por que?), num ponto D. O ponto D é distinto dos pontos A_i (por que?). Isto contraria o fato de que r possui apenas os pontos A_i. Logo, s não pode possuir um ponto C distinto dos B_i, concluindo a demonstração deste caso. □

2° caso (r é paralela a s). Seja B_1 um ponto de s (axioma I_1). Seja t_1 a reta determinada por A_1 e B_1. Seja agora t_2 a reta que passa por A_2. Agora, a demonstração continua como no 1° caso. □

13. Construindo um modelo em que cada reta possui exatamente 3 pontos.

Pontos para começar: as letras A, B e C.
Reta $r_1 = \{A, B, C\}$
Ponto fora de r_1 : a letra D.
Precisamos de reta paralela a r_1, pelo ponto D. Isto obriga que se tenha uma reta $r_2 = \{D, E, F\}$
Precisamos de reta que contém A e D Isto obriga criar mais uma reta $r_3 = \{A, D, G\}$.
Precisamos de reta paralela à r_1 e à r_2, passando por G. Isto obriga $r_4 = \{G, H, I\}$.
Até agora temos 9 pontos: A, B, C, D, E, F, G, H, I. O esquema abaixo sugere 12 retas: {A, B, C}, {D, E, F}, {G, H, I}, {A, D, G}, {B, E, H} , {C, F, I}, {A, E, I}, {G, E, C}, {B, F, G}, {C, D, H}, {D, B, I}, {A, H, F}. O leitor pode se reportar à figura abaixo, para se convencer de que os 5 axiomas estão satisfeitos.
Neste modelo, observe o seguinte:
(a) a quantidade de pontos de cada reta é $k = 3$;
(b) a quantidade de retas que passam por um dado ponto é $m = 4$;
(c) a quantidade de pontos é $n = 9$;
(d) a quantidade de retas é $r = 12$. Será coincidência que $n = k^2$ e $r = mk$?



14. **Teorema D.** *Se por um ponto dado A passam m retas, então por outro ponto B qualquer também passam m retas.*

Demonstração. Sejam $r_1, r_2, \dots, r_m$ as retas que passam por A. Suponhamos que r_1 é a reta que também passa por B. Sejam $s_2, \dots, s_m$ as retas paralelas a $r_2, \dots, r_m$, respectivamente, por B.