

Equações Diferenciais Ordinárias

Prof. Ole Peter Smith, PhD, IME/UFG

29 de junho de 2018

Equações Diferenciais Ordinárias Lista de exercícios em Equações Diferenciais Ordinárias

Sumário

1	EDOs de Ordem 1	1
1.1	Exercícios:	2
2	Formas Diferenciais	2
2.1	Existência e Unicidade	2
2.2	Formas Diferenciais	3
2.3	Exercícios:	3
3	Exponencial Complexa	4
3.1	Exercícios:	4
4	Equações Diferenciais Lineares com Coeficientes Constantes.	5
4.1	A Equação Homogênea.	5
4.2	A Equação Inhomogênea.	6
4.3	Exercícios:	6
5	Método de Coeficientes Indeterminados	8
5.1	Exercícios:	8
6	Séries de Potências e EDOs	10
6.1	Exercícios:	11

1 EDOs de Ordem 1

Para a equação diferencial *linear* de ordem 1:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad x \in I$$

onde p e q são funções contínuas no intervalo I , a solução completa é dado por:

$$y(x) = e^{-P(x)} \cdot \left\{ \int e^{P(x)} q(x) dx + c \right\}.$$

Onde: $P(x) = \int p(x) dx$. Nota-se: A Solução Completa da Equação Inhomogênea (SCEI) é a Solução Completa da Equação Homogênea (SCEH) mais uma Solução Particular da Equação Inhomogênea (SPEI).

Para a equação diferencial *separável* de ordem 1:

$$f(y)dy = g(x)dx, \quad x, y \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

onde f e g são funções contínuas no intervalo I , com primitivos F resp. G , a solução completa é dado por:

$$F(y) = \int f(y)dy = G(x) + c = \int g(x)dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Ou mais especificamente:

$$\int_{x_0}^x f(x)dx = \int_{t_0}^t g(t)dt$$

Considere a forma diferencial:

$$\omega = L(x, y)dx + M(x, y)dy = 0, \quad (x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

Os pontos singulares da ω , são os pontos: $L(x, y) = M(x, y) = 0$. A forma diferencial é dita *Exata*, se eixste uma função diferenciavel, $F(x, y)$, tal que $dF = \omega$. Neste caso, a função $F(x, y)$ é chamada a função *Potencial*. A forma ω é exato, se e somente se, integrais de curva somente dependem da posição inicial e final, ie não dependem do caminho. Um outro resultado é, que se a forma ω é exata, então ela é *fechada*:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}$$

Do outro lado, se ω é fechada e Ω é aberta e de forma estrela, então ω é exata.

Teorema 1 (*Teorema de Existência e Unicidade para formas diferenciais*).

Seja $\Omega \in \mathbb{R}$ aberta e $L(x, y)$ e $M(x, y)$ $C^1(\Omega)$, tal que $(L(x, y), M(x, y)) \neq (0, 0)$ em todo Ω , então em cada Ponto, $(x, y) \in \Omega$, passa uma e somente uma solução para:

$$L(x, y)dx + M(x, y)dy = 0$$



1.1 Exercícios:

1.1 Encontrar, usando o método de separação das variáveis, a solução completa das equações diferenciais abaixo. Encontre também a solução maximal, $\varphi(t)$, passando pelo elemento de linha indicado:

- (a) $\frac{dx}{dt} = \frac{5t}{x}$, $t \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. $\varphi(0) = 1$.
(b) $\frac{dx}{dt} + 2te^x = 0$ $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. $\varphi(0) = 0$.
(c) $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x}t^3$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}_+$. $\varphi(0) = 1$.
(d) $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2-x}{t}$, $t > 0$, $x > 1$. $\varphi(1) = 2$.

Hint:

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x}$$

1.2 Encontrar as soluções maximais das seguintes equações diferenciais

Ans:

- (a) $\frac{dx}{dt} - 3x = e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$,
Ans: $e^{2t} + ce^{3t}$, $t \in \mathbb{R}$.

- (b) $t \frac{dx}{dt} - 2x = t^5$, $t > 0$,

Ans: $x(t) = t^2(\frac{1}{3}t^3 + c)$, $t \in \mathbb{R}$ Qualquer solução definida para $t < 0$, pode ser continuada para qualquer outra solução definida para $t > 0$.

- (c) $\frac{dx}{dt} + x \tan t = \sin 2t$, $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Ans: $x(t) = c \cos t - 2 \cos^2 t$, $t \in \mathbb{R}$

1.3 Encontrar as soluções maximais das seguintes equações diferenciais

- (a) $\frac{dx}{dt} - \frac{\cos t}{1 + \sin t} x = \cos t$, $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$;
(b) $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = -2t^2$, $t < 0 \vee t > 0$;
(c) $\cos t \frac{dx}{dt} - x \sin t = t \sin t + \cos t$, $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$;
(d) $\frac{dx}{dt} + x \cos t = \sin t \cos t$, $t \in \mathbb{R}$.

1.4 Encontrar todas as soluções maximais da equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} + x \cos t = \sin t \cos t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Encontrar a solução maximal, $x = \varphi(t)$, cuja: $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$.

1.5 Seja g uma função diferenciável no intervalo I . Encontre, em termos de g , todas as soluções maximais da equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} + g'(t)x = g'(t), \quad t \in I$$

Encontrar a solução maximal, $x = \varphi(t)$, cuja: $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$.

1.6 Encontre a solução completa da equação diferencial:

$$t(t+1)\frac{dx}{dt} + x = t(t+1)^2e^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Mostre que para todos soluções maximais, $\varphi(t)$, a limite $\lim_{t \rightarrow -1+} \varphi(t)$ existe. No mais, mostre também que não existe solução maximal cuja a limite $\lim_{t \rightarrow 0-} \varphi(t)$ existe.

Ans:

$$x(t) = \frac{t+1}{t} \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2} + c \right]$$

1.7 Encontre a solução completa das equações diferenciais:

- (a) $(t+1)\frac{dx}{dt} + x^2 = 0$, $t \neq -1, x \neq 0$
(b) $(t-1)\frac{dx}{dt} = tx$, $t \neq 1, x \neq 0$

2 Formas Diferenciais

2.1 Existência e Unicidade

Teorema 2 Equação diferencial normalizada de ordem n :

$$(*) : \frac{d^n x}{dt^n} = F(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}), \quad (t, x, p_1, \dots, p_{n-1}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Se:

1. Ω aberta;
2. F é contínua em Ω ;
3. As derivadas parciais da F ao respeito de $x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ são contínuas em Ω .

Então, pelo qualquer emphelmento de linha: $(t_0, x_0, p_1, \dots, p_{n-1}) \in \Omega$, passa uma e somente uma solução máxima para $(*)$, ou seja:

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = p_1, \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t_0) = p_{n-1}.$$



2.2 Formas Diferenciais

Forma diferencial em $\mathbb{R}^2$:

$$\omega = L(x, y)dx + M(x, y)dy, \quad (x, y) \in \Omega$$

Teorema 3 Se:

1. Ω aberta;
2. L, M são $C^1(\Omega)$;
3. $(L, M) \neq (0, 0)$ para todos $(x, y) \in \Omega$;

Então, por qualquer ponto, $(x_0, y_0) \in \Omega$, passa uma e somente uma solução maximal para a equação diferencial

$$\omega = L(x, y)dx + M(x, y)dy = 0.$$

A forma diferencial, ω , é dito *exata*, se é o diferencial de uma função, F , diferenciável em Ω :

$$\omega = dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

Uma condição *necessária*, mas *não* suficiente, para ω ser exata, é::

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}$$

Uma forma diferencial que satisfaz esse equação é dito *fechada*.

Teorema 4 Uma forma diferencial, $\omega = L(x, y)dx + M(x, y)dy$, em um conjunto aberta e simplesmente conexa¹, é exata, se e somente se, é fechada.

Para calculamos uma primitiva de uma forma diferencial exata, procede-se:

$$F_1(x, y) = \int L(x, y)dx,$$

Calcule:

$$\omega - dF_1 = f(y)dy,$$

e:

$$F_2(y) = \int f(y)dy$$

Agora:

$$F(x, y) = F_1(x, y) + F_2(y),$$

é uma primitiva do ω . A solução completa da $\omega = 0$, é dado por:

$$F(x, y) = c,$$

onde c é um constante real arbitrária.

2.3 Exercícios:

2.1 Quais formas diferenciais são extatas em $\mathbb{R}^2$:

- (a) $2xydx + x^2dy = 0$
- (b) $(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy = 0$
- (c) $(4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$
- (d) $(ye^{-x} - 1)dx + e^{-x}dy = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$
- (e) $ydx - (x + y^2)dy, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$

Em cada caso, encontrar os pontos singulares. As equações tem soluções retilíneos?

2.2 Mostre que as formas diferenciais são extatas em $\mathbb{R}^2$ e encontre sua solução completa.:

- (a) $(3e^{3x}y - 2x)dx + e^{3x}dy = 0$
- (b) $(\cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy = 0$
- (c) $e^{y^2}dx + (2xye^{y^2} - 2y)dy = 0$
- (d) $(4y + x^3)dx - xdy, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$
- (e) $(x - y^2)dx + 2xydy, (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$

2.3 (a) Encontre a solução completa da equação diferencial:

$$(x\sqrt{x^2 + y^2} - y)dx + (y\sqrt{x^2 + y^2} - x)dy = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Encontre os pontos singulares. Encontre e desenhe a solução máxima contendo o ponto $(0, 0)$. *Hint:* Pode-se utilizar coordenados polares.

(b) Encontre a solução completa da equação diferencial:

$$x(1 + y^2)dx - y(2y^2 - x^2 + 1)dy = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Encontre o ponto singular. Quantas soluções maximais passa por esse ponto?

2.4 Encontrar os pontos singulares e a solução completa para as equações diferenciais abaixo.

¹Um conjunto, A , em $\mathbb{R}^2$ é simplesmente conexa, se todo polígono contido no A , contém o interior desse.



- (a) $x^3 dx + (y + 1)^2 dy = 0$;
(b) $(1 + x^3) dx - x^2 y dy = 0$;
(c) $x(1 + y^2) dx + y(1 + x^2) dy = 0$.

Em cada caso, investigue a quantia de soluções passando pelos pontos singulares.

2.5 Encontrando um fator integrante da forma $x^\alpha y^\beta$, resolva as equações diferenciais:

- (a) $(xy^2 + y) + x dy = 0$;
(b) $(x^2 y^3 + 2y) dx + (2x - 2x^3 y^2) dy = 0$.

3 Exponencial Complexa

Definição, $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^{x+iy} := e^x (\cos y + i \sin y)$$

Vale, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

$$(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$$

Especificamente, $n \in \mathbb{Z}$:

$$(e^z)^n = e^{nz} = e^{nx} (\cos ny + i \sin ny)$$

Fórmula de Moivre:

$$(\cos y + i \sin y)^n = \cos ny + i \sin ny$$

Coordenados polares, para números complexos, $z = x + iy = (r)_\theta$:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \geq 0, -\pi < \theta \leq \pi$$

Vale:

$$(r)_\theta^n = (r)_{n\theta}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Equação Binômio de grau $n > 1$:

$$(*) : \quad z^n = c = a + ib = (r)_\theta$$

Os n raízes em $(*)$ são:

$$z = (\sqrt[n]{r})_{\frac{\theta + 2p\pi}{n}}, \quad p = 0, \dots, n-1$$

3.1 Exercícios:

3.1 Escreva números complexos de forma polar:

- (a) $-4 - 4i$,
(b) $2\sqrt{3} - 6i$,
(c) $-\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$,
(d) $3 + i\sqrt{3}$,
(e) $\frac{4}{1+i}$,
(f) $\frac{1}{-2+2i\sqrt{3}}$.

3.2 Escreva números complexos de forma $x + iy$:

- (a) $(6)_{\frac{3\pi}{2}}$,
(b) $(14)_{15\pi}$,
(c) $(\frac{1}{4})_{-\frac{13\pi}{6}}$,
(d) $(2)_{-\frac{\pi}{8}}$,

3.3 Utilize fórmula de Moivre para encontrar as fórmulas de $\cos 3v$, $\sin 3v$, $\cos 4v$, $\sin 4v$.

Hint! Lembre-se:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

3.4 Demostre, por exemplo por indução e usando as fórmulas de adição para $\cos$ e $\sin$, a fórmula de Moivre.

3.5 Resolva as Equações Binômios:

- (a) $z^4 = 2$,
(b) $z^4 = -1$,
(c) $z^3 = -i$,
(d) $z^3 = 1 - i$,
(e) $(z - 1)^3 = -1 + i$,
(f) $(z + 2)^4 = 8i$.

Em cada caso, indicar os raízes numa figura.



4 Equações Diferenciais Lineares com Coeficientes Constantes.

4.1 A Equação Homogênea.

Para a equação *linear*, homogênea de ordem n com *coeficientes constantes*:

$$(*) : \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \quad t \in \mathbb{R},$$

Escreva:

$$\hat{L}x = 0,$$

e notamos que a operadora $\hat{L}$ é *linear*:

$$\begin{aligned} I : \quad \hat{L}(x+y) &= \hat{L}x + \hat{L}y \\ II : \quad \hat{L}(\alpha x) &= \alpha \hat{L}x \end{aligned} \quad (1)$$

Procurando soluções da forma $\varphi(t) = ce^{\lambda t}$, temos:

$$\hat{L}e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t}, \quad (2)$$

onde $P(\lambda)$ é o *Polinômio Caraterístico*:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

Equação (2) diz, que $e^{\lambda t}$ é autofunção da operadora $\hat{L}$ com autovalor $P(\lambda)$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é raiz em $P(\lambda)$, então as funções:

$$\varphi_\lambda(t) = ce^{\lambda t}, \quad c \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R}$$

são soluções do (*).

Derivando Eq. (2) ao respeito de λ (derivação ao respeito de λ e t comutem):

$$\hat{L}te^{\lambda t} = P'(\lambda)e^{\lambda t} + P(\lambda)te^{\lambda t}$$

Derivando novamente:

$$\hat{L}t^2e^{\lambda t} = P''(\lambda)e^{\lambda t} + 2P'(\lambda)te^{\lambda t} + P(\lambda)t^2e^{\lambda t}$$

Generalizando:

$$\hat{L}t^p e^{\lambda t} = \sum_{q=0}^p P^{(q)}(\lambda)t^{p-q}e^{\lambda t}, \quad p \geq 1$$

Se λ é um raiz, possivelmente complexa, de multiplicidade $1 \leq \rho \leq n$:

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = \dots = P^{(\rho-1)}(\lambda) = 0$$

as ρ funções:

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{\rho-1}e^{\lambda t}$$

são soluções linearmente independentes da equação homogênea: $\hat{L}x = 0$. Qualquer combinação linear:

$$x(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t} + \dots + c_\rho t^{\rho-1}e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

é solução da equação homogênea.

No caso λ complexa, temos que se λ é raiz, então seu complex conjugada, $\bar{\lambda}$ também o é. Denotando: $\lambda = \alpha + i\beta$, a exponencial complexa é definida por:

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

Para um par de raízes complex conjugadas de multiplicidade ρ , as 2ρ funções:

$$e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda}t}, te^{\lambda t}, te^{\bar{\lambda}t}, \dots, t^{\rho-1}e^{\lambda t}, t^{\rho-1}e^{\bar{\lambda}t}$$

são soluções linearmente independentes da equação homogênea, (*). Temos:

$$c_+e^{(\alpha+i\beta)t} + c_-e^{(\alpha-i\beta)t} = c_1e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2e^{\alpha t} \sin \beta t$$

Assim, 2ρ soluções linearmente independentes para a equação homogênea, são:

$$e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{\rho-1}e^{\alpha t} \cos \beta t, t^{\rho-1}e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

e qualquer combinação linear:

$$x(t) = (c_1e^{\alpha t} + c_2te^{\alpha t} + \dots + c_\rho t^{\rho-1}e^{\alpha t}) \cos \beta t + (d_1e^{\alpha t} + d_2te^{\alpha t} + \dots + d_\rho t^{\rho-1}e^{\alpha t}) \sin \beta t, \quad t \in \mathbb{R}$$

é solução da equação homogênea. Pelo Teorema Fundamental do Álgebra, os n raízes geram n soluções linearmente independentes da equação homogênea, (*). Através de uma Teorema de Existência e Unicidade, concluímos que estas combinações lineares constituem a solução completa.



4.2 A Equação Inhomogênea.

Consideramos a Equação Inhomogênea²:

$$(**) : \widehat{L}x = q(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}.$$

A Solução Completa da Equação Inhomogênea, SCEiH, é dado como a Solução Completa da Equação Homogênea, SCEH, mais **uma** Solução Particular da Equação Inhomogênea, SPEiH. Assim, para resolver (**), basta encontramos uma solução particular da mesma. Para esse fim, escreve $q(t)$ como uma soma de funções elementares:

$$q(t) = a_1 q_1(t) + \dots + a_k q_k(t).$$

E resolve:

$$(*)_k : \widehat{L}x = q_k(t), \quad t \in I.$$

Se $q_k(t) = t_m e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ e λ , não é raiz de ordem $\rho \geq 0$, uma solução particular é da forma ($\rho = 0$ corresponde ao caso λ não ser solução):

$$\varphi_k(t) = (A_0 t^\rho + A_1 t^{\rho+1} + \dots + A_m t^{\rho+m}) e^{\lambda t}, \quad A \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

A mesma idéia é aplicável no caso $q_k(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$ (ponhe $\lambda = \alpha + i\beta$ a cima), mas nesse caso precisa-se incluir termos tanto de $\cos$ e $\sin$. Por exemplo, se:

$$q_k(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t,$$

uma solução particular será da forma:

$$\varphi_k(t) = A e^{\alpha t} \cos \beta t + B e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Um comentário similar vale para o caso $q_k(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$. Em ambos os casos, a utilização da exponencial complexa é vantajosa. No caso:

$$q_k(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t = \operatorname{Re} \left(e^{(\alpha+i\beta)t} \right)$$

considere a equação diferencial complexa:

$$\widehat{L}z_k = e^{(\alpha+i\beta)t},$$

e resolve esta usando os resultados a cima. Terminado, a solução particular da equação original, é: $\varphi_k = \operatorname{Re} (Z_k)$. Similarmente, para:

$$q_k(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t = \operatorname{Im} \left(e^{(\alpha+i\beta)t} \right)$$

considere novamente:

$$\widehat{L}z_k = e^{(\alpha+i\beta)t}.$$

Resolvida, a solução particular da equação original, é: $\varphi_k = \operatorname{Im} (Z_k)$.

4.3 Exercícios:

4.1 Encontrar a solução completa das equações diferenciais:

(a) $\frac{d^3 x}{dt^3} - \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x = 0$

Ans: $x(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t, \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $\frac{d^3 x}{dt^3} - 3 \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} - x = 0$

Ans: $x(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^t, \quad t \in \mathbb{R}$

(c) $\frac{d^4 x}{dt^4} + 2 \frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0$

Ans: $x(t) = (c_1 + c_2 t) \cos t + (c_3 + c_4 t) \sin t, \quad t \in \mathbb{R}$

(d) $\frac{d^4 x}{dt^4} + x = 0$

(e) $\frac{d^4 x}{dt^4} + 6 \frac{d^3 x}{dt^3} + 5 \frac{d^2 x}{dt^2} - 24 \frac{dx}{dt} - 36x = 0$

Ans: $x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-3t} + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-2t}, \quad t \in \mathbb{R}$

(f) $\frac{d^6 x}{dt^6} + 9 \frac{d^4 x}{dt^4} + 24 \frac{d^2 x}{dt^2} + 16x = 0$

4.2 Encontrar (i) a solução completa das equações diferenciais e (ii) a solução maximal passando pelos elementos de linha indicados:

(a) $\frac{d^3 x}{dt^3} - \frac{d^2 x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 4x = 0, \quad (t_0, x_0, p_1, p_2) = (0, -3, -3, 3)$

(b) $\frac{d^3 x}{dt^3} + 4 \frac{dx}{dt} = 0, \quad (t_0, x_0, p_1, p_2) = (\pi, 2, -2, 4)$

(c) $\frac{d^4 x}{dt^4} - 6 \frac{d^3 x}{dt^3} + 12 \frac{d^2 x}{dt^2} - 8 \frac{dx}{dt} = 0 \quad (t_0, x_0, p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 0, -2, -4)$

4.3 Encontrar a solução completa das equações diferenciais:

(a) $\frac{d^3 x}{dt^3} + 3 \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + x = e^t, \quad t \in \mathbb{R}$

Ans: $x(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^{-t} + \frac{1}{8} e^t$

(b) $\frac{d^4 x}{dt^4} + 16x = t^4, \quad t \in \mathbb{R}$

Ans: $x(t) = e^{\sqrt{2}t} (c_1 \cos \sqrt{2}t + c_2 \sin \sqrt{2}t) + e^{\sqrt{2}t} (c_3 \cos \sqrt{2}t + c_4 \sin \sqrt{2}t) + \frac{1}{16} t^4 - \frac{1}{24}, \quad t \in \mathbb{R}$

²Não homogênea



(c) $\frac{d^5 x}{dt^5} + 4\frac{d^4 x}{dt^4} = e^t + 3 \sin 2t + t, \quad t \in \mathbb{R}$

Ans: $x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 + c_3 t + c_4 t^2 + c_5 t^3 + \frac{1}{5} e^t + \frac{3}{160} (2 \sin 2t - \cos 2t) + \frac{1}{96} t^4 (t - 5), \quad t \in \mathbb{R}$

(d) $\frac{d^3 x}{dt^3} - 5\frac{d^2 x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} = -10e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}$

Ans: $x(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{t^4} - \frac{1}{4} e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}$

(e) $\frac{d^3 x}{dt^3} - \frac{d^2 x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} = e^t, \quad t \in \mathbb{R}$

Ans: $x(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} - \frac{1}{2} e^t, \quad t \in \mathbb{R}$

4.4 Encontrar a solução completa da equação diferencial:

$$\frac{d^3 x}{dt^3} - 5\frac{d^2 x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} - 4x = e^{2t}$$

Ans: $c_1 e^t + (c_2 + c_3) e^{2t} + \frac{1}{2} t^2 e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}.$

4.5 Encontrar a solução completa das equações diferenciais:

(a) $\frac{d^2 x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = e^t, \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $\frac{d^2 x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = t^3, \quad t \in \mathbb{R}$

(c) $\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 5x = \cos t, \quad t \in \mathbb{R}$

(d) $\frac{d^2 x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 2t^2 + 3, \quad t \in \mathbb{R}$

(e) $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = -5 \sin t, \quad t \in \mathbb{R}$

(f) $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = e^{2t} + t, \quad t \in \mathbb{R}$

(g) $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4x = 3e^t + 2 \sin t, \quad t \in \mathbb{R}$

(h) $\frac{d^2 x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 8x = 2e^{2t} \cos 2t + \cos t, \quad t \in \mathbb{R}$

(i) $\frac{d^2 x}{dt^2} + x = 3 \cos \frac{t}{2} + 2t^2 + 3, \quad t \in \mathbb{R}$

Encontrar a solução completa das equações diferenciais:

4.6 (a) $\frac{d^3 x}{dt^3} - \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $\frac{d^3 x}{dt^3} - 3\frac{d^2 x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(c) $\frac{d^4 x}{dt^4} + 2\frac{d^2 x}{dt^2} + x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(d) $\frac{d^4 x}{dt^4} + x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(e) $\frac{d^4 x}{dt^4} + 6\frac{d^3 x}{dt^3} + 5\frac{d^2 x}{dt^2} - 24\frac{dx}{dt} - 36x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(f) $\frac{d^6 x}{dt^6} + 9\frac{d^4 x}{dt^4} + 24\frac{d^2 x}{dt^2} + 16x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(g) $\frac{d^3 x}{dt^3} - \frac{d^2 x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(h) $\frac{d^3 x}{dt^3} + 4\frac{dx}{dt} = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(i) $\frac{d^4 x}{dt^4} - 6\frac{d^3 x}{dt^3} + 12\frac{d^2 x}{dt^2} - 8\frac{dx}{dt} = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

Ans: $t \in \mathbb{R}$ e $c_1, \dots, c_6$ arbitrários em $\mathbb{R}$:

(a) $x(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t;$

(b) $x(t) = \{c_1 + c_2 t + c_3 t^2\} e^t;$

(c) $x(t) = (c_1 + c_2 t) \cos t + (c_3 + c_4 t) \sin t;$

(d) $x(t) = (c_1 + c_2 t) e^t + c_3 \cos t + c_4 \sin t;$

(e) $x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-3t} + c_2 e^{2t} + c_4 e^{-2t};$

(f) $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + e^t \{c_3 \cos t + c_4 \sin t\} + e^{-t} \{c_5 \cos t + c_6 \sin t\};$

(g) $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_2 e^{-2t};$

(h) $x(t) = x(t) = c_1 + c_2 \cos 2t + c_2 \sin 2t;$

(i) $x(t) = x(t) = c_1 + e^{2t} \{c_2 + c_3 t + c_4 t^2\}.$



5 Método de Coeficientes Indeterminados

Considerando um EDO *linear e normalizado*, de ordem dois:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p_1(t)\frac{dx}{dt} + p_0(t)x = q(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R},$$

e dado que $\varphi_1(t)$ é solução da equação homogênea, então (no intervalo I)

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \int \frac{1}{\varphi_1(t)^2} e^{-P_1(t)} dt = \varphi_1(t)I(t),$$

também é. Aqui, como acostumadamente: $P_1(t) = \int p_1 dt$. No mais, uma solução *particular* da equação inhomogênea é dado por:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \varphi_2(t) \int \frac{\varphi_1(t)q(t)}{W(t)} dt - \varphi_1(t) \int \frac{\varphi_2(t)q(t)}{W(t)} dt = \\ \varphi_2(t)I_1(t) - \varphi_1(t)I_2(t) &= \begin{vmatrix} I_1(t) & I_2(t) \\ \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \end{vmatrix}, \quad t \in I. \end{aligned}$$

Nota-se, que o cálculo do $W(t)$ pode ser simplificado consideravelmente:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_1(t)I(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_1'(t)I(t) + \varphi_1(t)I'(t) \end{vmatrix} = \varphi_1(t) \cdot \varphi_1(t)I'(t)$$

Pela definição do integral $I(t)$:

$$I'(t) = \frac{1}{\varphi_1(t)^2} e^{-P(t)}$$

Então:

$$W(t) = \varphi_1(t)^2 \frac{1}{\varphi_1(t)^2} e^{-P(t)} = e^{-P(t)}$$

5.1 Exercícios:

5.1 Para as Equações Diferenciais abaixo, demonstre que $\varphi_1(t)$ é solução, encontre a solução completa:

(a) $\frac{d^2x}{dt^2} - (1 + 2 \tan^2 t)x = 0, \quad t \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \varphi_1(t) = \frac{1}{\cos t}$

Ans:

(b) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2 \tan t \frac{dx}{dt} + 3x = 0, \quad t \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \varphi_1(t) = \sin t$

(c) $t \frac{d^2x}{dt^2} - (2t + 1) \frac{dx}{dt} + (t + 1)x = 0, \quad t > 0, \quad \varphi_1(t) = e^t$

5.2 Para as Equações Diferenciais abaixo, demonstre que $\varphi_1(t)$ é solução, encontre todas as soluções maximais:

(a) $\frac{d^2x}{dt^2} - \tanh t \frac{dx}{dt} - (1 - \tanh^2 t)x = e^t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1(t) = \cosh t$

Ans: $P_1(t) = -\log \cosh t$;

$I(t) = 2 \operatorname{Arctan} e^t$;

$\varphi_2(t) = \cosh t \operatorname{Arctan} e^t$;

$W(t) = \frac{1}{2} \cosh t$;

$I_1(t) = 2e^t$;

$I_2(t) = 2e^t \operatorname{Arctan} e^t - \log(1 + e^{2t})$;

$\varphi_0(t) = \cosh t \log(1 + e^{2t})$.

(b) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2 \tan t \frac{dx}{dt} + 3x = 3 \tan t, \quad t \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \varphi_1(t) = \sin t$

Ans: $P_1(t) = \log \cos^2 t$;

$I(t) = -2 \cot t$;

$\varphi_2(t) = \sin t \cot 2t$;

$W(t) = -\frac{1}{\cos^2 t}$;

$I_1(t) = -2 \sin^3 t$;

$I_2(t) = 2 \cos^3 t - 3 \cos t$;

$\varphi_0(t) = \tan t$.

(c) $t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + t \frac{dx}{dt} + (t^2 - \frac{1}{4})x = t\sqrt{t}, \quad t > 0, \quad \varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cos t$

Ans: $P_1(t) = \log t$;

$I(t) = \tan t$;

$\varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sin t$; $W(t) = 1/t$;

$I_1(t) = \sin t$;

$I_2(t) = -\cos t$;

$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.



(d) $t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} - 2t \frac{dx}{dt} - (t^2 - 2)x = t^3, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1(t) = t \cosh t$

Ans: $P_1(t) = -\log t^2$;

$I(t) = \tanh t$;

$\varphi_2(t) = t \sinh t$;

$W(t) = t^2$;

$I_1(t) = \sinh t$;

$I_2(t) = \cosh t$;

$\varphi_0(t) = -t$.

(e) $(1 - t^2) \frac{d^2 x}{dt^2} - t \frac{dx}{dt} + x = t, \quad -1 < t < 1, \quad \varphi_1(t) = t$

Ans: $P_1(t) = \frac{1}{2} \log(1 - t^2)$;

$I(t) = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$;

$\varphi_2(t) = \sqrt{1 - t^2}$;

$W(t) = -\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$;

$I_1(t) = \frac{1}{2} (\text{Arcsin } t - t\sqrt{1 - t^2})$;

$I_2(t) = -\frac{1}{2} t^2$;

$\varphi_0(t) = \frac{1}{2} (t - \sqrt{1 - t^2} \text{Arcsin } t)$.

(f) $t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} - 2t \frac{dx}{dt} + (t^2 + 2)x = t^3, \quad t \neq 0, \quad \varphi_1(t) = t \sin t$

Ans: $P_1(t) = -\log t^2$;

$I(t) = -\cot t$;

$\varphi_2(t) = t \cos t$;

$W(t) = -t^2$;

$I_1(t) = \cos t$;

$I_2(t) = -\sin t$;

$\varphi_0(t) = t$.

(g) $\sin t \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \cos t \frac{dx}{dt} - \sin t x = 0, \quad t \neq p\pi, \quad \varphi_1(t) = \frac{1}{\sin t}$

Ans: $P_1(t) = \log \sin^2 t$;

$I(t) = t$;

$\varphi_2(t) = \frac{t}{\sin t}$.

5.3 Considere uma EDO da forma:

$$t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 t \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

Uma EDO deste tipo, é conhecido como um EDO de Euler (de segundo ordem).

Usando a substituição $u = \log t$ e $\varphi(t) = \psi(\log t)$, demonstre que em cada um dos intervalos, $t < 0$ resp. $t > 0$, a equação é equivalente à:

$$\frac{d^2 x}{du^2} + (a_1 - 1) \frac{dx}{du} + a_0 x = 0, \quad u \in \mathbb{R}$$

Encontrar a solução completa das seguintes EDOs de Euler:

(a) $t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} - 3t \frac{dx}{dt} + 3x = \frac{t^3}{1 + t^2}, \quad t > 0$

Ans: $-\frac{1}{4} t(1 + t^2) \log(1 + t^2) + \frac{1}{4} t^3 \log t, \quad t \neq 0$

(b) $t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} - 4t \frac{dx}{dt} + 6x = 6(\log t)^2 + 2 \log t + 4, \quad t > 0$

Ans: $x(t) = c_1 t^2 + c_2 t^3 + (\log t)^2 + 2 \log t + 2, \quad t > 0$

(c) $t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} - 2t \frac{dx}{dt} + 2x = 2 \text{Arctan } t, \quad t > 0$

5.4 Encontrar a solução completa da EDO:

$$t(t + 1) \frac{d^2 x}{dt^2} + (2 - t^2) \frac{dx}{dt} - (2 + t)x = (t + 1)^2, \quad t > 0,$$

adivinhandando uma função de potência como solução da equação homogênea.

Ans: $\varphi_1(t) = \frac{1}{t}$; $P_1(t) = -t + \log \left| \frac{1}{t+1} \right|$; $I(t) = te^t$; $\varphi_2(t) = e^t$; $I_1(t) = -e^{-t}$; $I_2(t) = \frac{1}{2} t^2$; $\varphi_0(t) = -1 - \frac{1}{2} t$.

5.5 Sabendo que tens soluções exponenciais, $\varphi_1(t) = e^{\alpha t}$, encontrar todas as soluções maximais das EDOs:

(a)

$$t(t + 1) \frac{d^2 x}{dt^2} + (2 - t^2) \frac{dx}{dt} - (2 + t)x = (t + 1)^2, \quad t > 0.$$

5.6 Sabendo que as equações homogêneas tens soluções polinomiais, encontrar todas as soluções maximais das EDOs:

Ans:

(a) $(t - 2)^2 \frac{d^2 x}{dt^2} - (t^2 - 2t) \frac{dx}{dt} + tx = 0, \quad t \neq 2,$

Ans: $(c_1 + c_2 t)(t - 1), \quad t \in \mathbb{R}$



(b) $(t^2 + 4)\frac{d^2x}{dt^2} - 2t\frac{dx}{dt} + 2x = 0, \quad t \in \mathbb{R},$

Ans: $(c_1t + c_2(t^2 - 4)), t \in \mathbb{R}$

(c) $(2t^3 + t)\frac{d^2x}{dt^2} + (2t^2 + 3)t\frac{dx}{dt} - 8tx = 0, \quad t \in \mathbb{R},$

(d) $\frac{1}{2}(t^2 + 1)\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} - x = \text{Arctan } t, \quad t \in \mathbb{R}.$

(e) $(t^2 + 1)\frac{d^2x}{dt^2} + 2t\frac{dx}{dt} - 2x = 4t^2 + 2, \quad t \in \mathbb{R}.$

5.7 Sabendo que tens soluções potenciais, $\varphi_1(t) = t^\alpha$, encontrar todas as soluções maximais das EDOs:

(a) $2t^2\frac{d^2x}{dt^2} + 3t\frac{dx}{dt} - x = 9t^2 + 5t\sqrt{t}; \quad t > 0,$

5.8 Encontrar todas as soluções maximais das equações diferenciais:

(a) $\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = e^t \cos^2 t, \quad t \in \mathbb{R}$

Ans: $x(t) = (c_1 + c_2t)e^{3t} + \frac{1}{8}e^t \left\{1 - \frac{1}{2}\sin 2t\right\}, t \in \mathbb{R}$

(b) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = e^t \sin t, \quad t \in \mathbb{R}$

Ans: $x(t) = (c_1 \cos t + c_2 \sin t)e^t + \frac{1}{2}te^t \cos t, t \in \mathbb{R}$

(c) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = 2\frac{e^t}{t^3}, \quad t \neq 0$

Ans: $x(t) = (c_1 + c_2t + \frac{1}{2t})e^t, t \neq 0$

(d) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = -4 \cos 2t, \quad t \in \mathbb{R}$

Ans: $x(t) = c_1 \cos 2t + (c_2 + t) \sin 2t, t \in \mathbb{R}$

(e) $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 4te^t, \quad t \in \mathbb{R}$

Ans: $x(t) = (c_1 + c_2t + \frac{2}{3}t^3)e^t, t \in \mathbb{R}$

(f) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x = -2e^{-2t} \sin t, \quad t \in \mathbb{R}$

Ans: $x(t) = (c_1 \cos t + (c_2 + t) \sin t) e^{-2t} t \in \mathbb{R}$

5.9 Encontrar todas as soluções maximais das EDOs:

(a) $\cosh t \frac{dx}{dt} + \sinh tx = 3 \cosh 2t, t \in \mathbb{R}$

(b) $\sin t \frac{d^2x}{dt^2} - \cos t \frac{dx}{dt} = 1, t \in \mathbb{R}$

6 Séries de Potências e EDOs

Para alguns EDOs, particularmente do segundo ordem (tipicamente EDOs com coeficientes polinomiais): podemos encontrar soluções em forma de *séries de potências*:

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

onde x pertence a um certo intervalo, o *intervalo de convergência*, $] - \lambda, \lambda[$. Mencionamos, que uma série de potência é *uniformemente convergente* no seu intervalo de convergência, isto é, podemos 'trocar somatório com derivação (integração)', ou seja:

$$y' = f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y'' = f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Mencionamos a função soma de umas séries de potências notáveis:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} = \cosh x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$$



$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1$$

$$(1-x)^\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad |x| < 1$$

Na última série, $\alpha \in \mathbb{R}$, aparece os coeficientes binomiais generalizados:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Destacamos que no intervalo de convergência:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \Rightarrow \\ \frac{dy}{dx} &= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{aligned}$$

6.1 Exercícios:

6.1 Encontrar intervalo de convergência para cada uma das séries de potência abaixo:

- (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} x^n$;
Ans: $\lambda = +\infty$.
- (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{3^n} x^n$
Ans: $\lambda = 3$.
- (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} [1 - (-2)^n] x^n$;
Ans: $\lambda = \frac{1}{2}$.
- (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} x^{2n}$;
Ans: $\lambda = \frac{1}{2}$.
- (e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^n} x^n$;
Ans: $\lambda = 2$.
- (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n} + 1)^n x^{3n}$;
Ans: $\lambda = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.
- (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$;
Ans: $\lambda = 0$.
- (h) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^n + b^n} x^n, \quad a \geq b > 0$;
Ans: $\lambda = a$.
- (i) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n + 1} x^n$;
Ans: $\lambda = 2$.
- (j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{2n} x^{2n}$;
Ans: $\lambda = \frac{1}{2}$.
- (k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!^2} x^n$;
Ans: $\lambda = +\infty$.
- (l) $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n^2} x^n$.
Ans: $\lambda = +\infty$.

6.2 Encontrar a série de potência e seu intervalo de convergência das seguintes funções:



- (a) $f(x) = \cos^2 x$;
Ans: $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, x \in \mathbb{R}$
- (b) $f(x) = \sinh^2 x$;
Ans: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, x \in \mathbb{R}$
- (c) $f(x) = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;
Ans: $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}, |x| < 1$
- (d) $f(x) = \frac{1}{2-x}$;
Ans: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}, |x| < 2$
- (e) $f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2}$;
Ans: $-\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (1-(2)^n) x^n, |x| < \frac{1}{2}$
- (f) $f(x) = \log(1+x)$;
Ans: $-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}, |x| < 1$
- (g) $f(x) = (1+x^2) \log(1+x)$;
Ans: $x - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n(n-2)} x^n, |x| < 1$
- (h) $f(x) = \text{Arctan } x$;
Ans: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, |x| < 1$
- (i) $f(x) = \text{Arctan } x + \log \sqrt{1+x^2}$;
Ans: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} x^{2n}, |x| < 1$

6.3 Encontrar intervalo de convergência e função soma, das seguintes séries de potência:

- (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$
Ans: $-\frac{x^2}{1+x^2}, |x| < 1$
- (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$;
Ans: $\frac{x}{(1-x)^2}, |x| < 1$
- (c) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)} x^n$;
Ans: $\frac{x^2-1}{2} \log(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}, |x| < 1$
- (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n} x^n$;
Ans: $-\log(1-2x), |x| < \frac{1}{2}$
- (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n$;
Ans: $\frac{1}{(1+x)^2} - 1, |x| < 1$
- (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^n \frac{n+2}{n+1} x^n$;
Ans: $-2 - \frac{1}{2x} \log(1+2x) + \frac{1}{1+2x}, |x| < 1$
- (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)!} x^n$;
Ans: $\frac{1}{x^3} \left(e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1 \right), x \in \mathbb{R}$
- (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(2n+1)} x^{2n}$;
Ans: $\frac{2}{x} \text{Arctan } \frac{x}{2} - 1, |x| < 2$



(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n;$
Ans: $\frac{1}{3} \cdot \frac{x}{3-x}, |x| < 3$

(j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n;$
Ans: $e^{-x} - 1, x \in \mathbb{R}$

(k) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} x^n;$
Ans: $-\frac{1}{2}(x-1)^2 \log(1-x) - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2, |x| < 1$

6.4 Dado a EDO:

$$(*) : \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 2y = 0,$$

(a) Encontrar em forma de uma série de potência a solução de (*), passando pelo elemento de linha (0, 1, 0).

Ans: $(x_0, y_0, y'_0) = (0, 1, 0) = (0, a_0, a_1).$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in \mathbb{R}$$

(b) Encontrar em forma de uma série de potência a solução de (*), passando pelo elemento de linha (0, 0, 1).

Ans: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} x^{2n+1}, x \in \mathbb{R}$

(c) Encontrar intervalo de convergência e função soma da série da questão anterior.

Ans: $x e^{\frac{1}{2}x^2}, x \in \mathbb{R}$

(d) Escreva a solução completa do (*).

Ans: $c_1 x e^{\frac{1}{2}x^2} + c_2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n}, x \in \mathbb{R}$

6.5 Dado a EDO:

$$(*) : \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0,$$

(a) Encontrar em forma de uma série de potência a solução de (*), passando pelo elemento de linha (0, 0, 1).

(b) Encontrar intervalo de convergência e função soma da série do questão anterior.

(c) Qual seria a estratégia para encontrar a solução completa do (*)?

6.6 Dado a EDO:

$$(*) : \quad (x - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} - y = 0,$$

(a) Encontrar em forma de uma série de potência a solução de (*), passando pelo elemento de linha (0, 0, 1).

(b) Encontrar intervalo de convergência e função soma da série do questão anterior.

(c) Encontrar a solução completa do (*) no intervalo $] -1, 1[$.

6.7 Dado a EDO:

$$(*) : \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 4x^3 y = 0,$$

(a) Encontrar em forma de uma série de potência, a solução, $\varphi(x)$, de (*), tal que: $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ e $\varphi''(0) = 2$.

(b) Encontrar intervalo de convergência e função soma da série do questão anterior.

(c) Encontrar a solução completa do (*).