Equações Diferenciais Ordinárias

Prof. Ole Peter Smith, PhD, IME/UFG

29 de junho de 2018

Equações Diferenciais Ordinárias Lista de exercícios em Equações Diferenciais Ordinárias

Sumário

1 EDOs de Ordem 1

Para a equação diferencial *linear* de ordem 1:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)x = q(x), \quad x \in I$$

onde p e q são funções contínuas no intervalo I, a solução completa é dado por:

$$y(x) = e^{-P(x)} \cdot \left\{ \int e^{P(x)} q(x)dx + c \right\}.$$

Onde: $P(x) = \int p(x)dx$. Nota-se: A Solução Completa da Equação Inhomogênea (SCEI) é a Solução Completa da Equação Homogênea (SCEH) mais uma Solução Particular da Equação Inhomogênea (SPEI).
Para a equação diferencial *separável* de ordem 1:

$$f(y)dy = g(x)dx, \quad x, y \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

onde f e g são funções contínuas no intervalo I, com primitivos F resp. G, a solução completa é dado por:

$$F(y) = \int f(y)dy = G(x) + c = \int g(x)dx + c, \quad c\mathbb{R}$$

Ou mais especificamente:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{t_0}^{t} g(t)dt$$

Considere a forma diferencial:

$$\omega = L(x,y)dx + M(x,y)dx = 0, (x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

Os pontos singulares da ω, são os pontos: $L(x,y) = M(x,y) = 0$. A forma diferencial é dita *Exato*, se eixste uma função diferenciavel, $F(x,y)$, tal que $dF = \omega$. Neste caso, a função $F(x,y)$ é chamada a função *Potencial*. A forma ω é exato, se e somente se, integrais de curva somente dependem da posição inicial e final, ie não dependem do caminho.
Um outro resultado é, que se a forma ω é exata, então ela é *fechada*:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}$$

Do outro lado, se ω é fechada e Ω é aberta e de forma estrela, então ω é exata.

Teorema 1 *(Teorema de Existência e Unicidade para formas diferenciais).*
Seja $\Omega \in \mathbb{R}$ aberta e $L(x,y)$ e $M(x,y)$ $C^1(\Omega)$, tal que $(L(x,y), M(x,y)) \neq (0,0)$ em todo Ω, então em cada Ponto, $(x,y) \in \Omega$, passa uma e somente uma solução para:

$$L(x,y)dx + M(x,y)dy = 0$$

1.1 Exercícios:

1.1 Encontrar, usando o método de separação das variáveis, a solução completa das equações diferenciais abaixo. Encontre também a solução maximal, $\varphi(t)$, passando pelo elemento de linha indicado:

(a) $\frac{dx}{dt} = \frac{5t}{x}, \quad t \in \mathbb{R}, \ \ x \neq 0 \,.\, \varphi(0) = 1.$

(b) $\frac{dx}{dt} + 2te^x = 0 \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2 \,.\, \varphi(0) = 0.$

(c) $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x}t^3, \quad t \in \mathbb{R}, \ \ x \in \mathbb{R}_+ \,.\, \varphi(0) = 1.$

(d) $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2-x}{t}, \quad t > 0, \ \ x > 1 \,.\, \varphi(1) = 2.$
Hint:

$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

1.2 Encontrar as soluções maximais das seguintes equações diferenciais

(a) $\frac{dx}{dt} - 3x = e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R},$

(b) $t\frac{dx}{dt} - 2x = t^5, \quad t > 0,$

(c) $\frac{dx}{dt} + x\tan t = \sin 2t, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$

1.3 Encontrar as soluções maximais das seguintes equações diferenciais

(a) $\frac{dx}{dt} - \frac{\cos t}{1+\sin t}x = \cos t, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[;$

(b) $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = -2t^2, \quad t < 0 \vee t > 0;$

(c) $\cos t\frac{dx}{dt} - x\sin t = t\sin t + \cos t, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[;$

(d) $\frac{dx}{dt} + x\cos t = \sin t\cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$

1.4 Encontrar todas as soluções maximais da equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} + x\cos t = \sin t\cos t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Encontrar a solução maximal, $x = \varphi(t)$, cuja: $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$.

1.5 Seja g uma função diferenciável no intervalo I. Encontre, em termos de g, todas as soluções maximais da equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} + g'(t)x = g'(t), \quad t \in I$$

Encontrar a solução maximal, $x = \varphi(t)$, cuja: $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$.

1.6 Encontre a solução completa da equação diferencial:

$$t(t+1)\frac{dx}{dt} + x = t(t+1)^2e^{-t^2}, \quad t\mathbb{R}$$

Mostre que para todos soluções maximais, $\varphi(t)$, a limite $\lim_{t\to -1+}\varphi(t)$ existe. No mais, mostre também que não existe solução maximal cuja a limite $\lim_{t\to 0^-}\varphi(t)$ existe.

1.7 Encontre a solução completa das equações diferenciais:

(a) $(t+1)\frac{dx}{dt} + x^2 = 0, \quad t \neq -1, x \neq 0$

(b) $(t-1)\frac{dx}{dt} = tx, \quad t \neq 1, x \neq 0$

2 Formas Diferenciais

2.1 Existência e Unicidade

Teorema 2 *Equação diferencial normalizada de ordem n:*

$$(*) : \frac{d^nx}{dt^n} = F(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}), \quad (t, x, p_1, \ldots, p_{n-1}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Se:

1. *Ω aberta;*
2. *F é contínua em Ω;*
3. *As derivadas parciais da F ao respeito de x, $\frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ são contínuas em Ω.*

Então, pelo qualquer emphelemento de linha: $(t_0, x_0, p_1, \ldots, p_{n-1}) \in \Omega$, passa uma e somente uma solução máximal para $(*)$, ou seja:

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = p_1, \quad \ldots \quad x^{(n-1)}(t_0) = p_{n-1}.$$

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

2.2 Formas Diferenciais

Forma diferencial em $\mathbb{R}^2$:

$$\omega = L(x,y)dx + M(x,y)dy, \quad (x,y) \in \Omega$$

Teorema 3 *Se:*

1. *Ω aberta;*
2. *L, M são $C^1(\Omega)$;*
3. *$(L, M) \neq (0,0)$ para todos $(x,y) \in \Omega$;*

Então, por qualquer ponto, $(x_0, y_0) \in \Omega$, passa uma e somente uma solução maximal para a equação diferencial

$$\omega = L(x,y)dx + M(x,y)dy = 0.$$

A forma diferencial, ω, é dito *exata*, se é o diferencial de uma função, F, diferenciável em Ω:

$$\omega = dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

Uma condição *necessária*, mas *não* suficiente, para ω ser exata, é::

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}$$

Uma forma diferencial que satisfaz esse equação é dito *fechada*.

Teorema 4 *Uma forma diferencia, $\omega = L(x,y)dx + M(x,y)dy$, em um conjunto aberta e simplesmente conexa*[1]*, é exata, se e somente se, é fechada.*

Para cálculamos uma primitiva de uma forma diferencial exata, procede-se:

$$F_1(x,y) = \int L(x,y)dx,$$

Calcule:

$$\omega - dF_1 = f(y)dy,$$

e:

$$F_2(y) = \int f(y)dy$$

Agora:

$$F(x,y) = F_1(x,y) + F)2(y),$$

é uma primitiva do ω. A solução completa da $\omega = 0$, é dado por:

$$F(x,y) = c,$$

onde c é um constante real arbitrária.

2.3 Exercícios:

2.1 Quais formas diferenciais são extatas em $\mathbb{R}^2$:

(a) $2xydx + x^2dy = 0$
(b) $(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy = 0$
(c) $(4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$
(d) $(ye^{-x} - 1)dx + e^{-x}dy = 0, (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
(e) $ydx - (x + y^2)dy, (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

Em cada caso, encontrar os pontos singulares. As equações tem soluções retilíneos?

2.2 Mostre que as formas diferenciais são extatas em $\mathbb{R}^2$ e encontre sua solução completa.:

(a) $(3e^{3x}y - 2x)dx + e^{3x}dy = 0$
(b) $(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0$
(c) $e^{y^2}dx + (2xye^{y^2} - 2y)dy = 0$
(d) $(4y + x^3)dx - xdy, (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
(e) $(x - y^2)dx + 2xydy, (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

2.3 (a) Encontre a solução completa da equação diferencial:

$$(x\sqrt{x^2+y^2} - y)dx + (y\sqrt{x^2+y^2} - x)dy = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Encontre os pontos singulares. Encontre e desenhe a solução máximal contendo o ponto $(0,0)$. *Hint:* Pode-se utilizar coordenados polares.

(b) Encontre a solução completa da equação diferencial:

$$x(1+y^2)dx - y(2y^2 - x^2 + 1)dy = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Encontre o ponto singular. Quantas soluções maximais passa por esse ponto?

2.4 Encontrar os pontos singulares e a solução completa para as equações diferenciais abaixo.

[1]Um conjunto, A, em $\mathbb{R}^2$ é simplesmente conexa, se todo polígono contido no A, contém o interior desse.

(a) $x^3dx+(y+1)^2dy=0$;

(b) $(1+x^3)dx-x^2ydy=0$;

(c) $x(1+y^2)dx+y(1+x^2)dy=0$.

Em cada caso, investigue a quantia de soluções passando pelos pontos singulares.

2.5 Encontrando um fator integrante da forma $x^\alpha y^\beta$, resolve as equações diferenciais:

(a) $(xy^2+y)+xdy=0$;

(b) $(x^2y^3+2y)dx+(2x-2x^3y^2)dy=0$.

3 Exponencial Complexa

Definição, $z=x+iy\in\mathbb{C}$:

$$e^z=e^{x+iy}:=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)$$

Vale, $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$:

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$$
$$\left(e^{z_1}\right)^{z_2}=e^{z_1z_2}$$

Especificamente, $n\in\mathbb{Z}$:

$$\left(e^z\right)^n=e^{nz}=e^{nx}\left(\cos ny+i\sin ny\right)$$

Fórmula de Moivre:

$$\left(\cos y+i\sin y\right)^n=\cos ny+i\sin ny$$

Coordenados polares, para números complexos, $z=x+iy=(r)_\theta$:

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,\qquad r\geq 0,-\pi<\theta\leq\pi$$

Vale:

$$(r)_\theta^n=(r)_{n\theta},\ n\in\mathbb{Z}$$

Equação Binômio de grau $n>1$:

$$(*):\qquad z^n=c=a+ib=(r)_\theta$$

Os n raízes em $(*)$ são:

$$z=\left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\theta+2p\pi}{n}},\qquad p=0,...,n-1$$

3.1 Exercícios:

3.1 Escreve números complexos de forma polar:

(a) $-4-4i$,

(b) $2\sqrt{3}-6i$,

(c) $-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$,

(d) $3+i\sqrt{3}$,

(e) $\frac{4}{1+i}$,

(f) $\frac{1}{-2+2i\sqrt{3}}$.

3.2 Escreve números complexos de forma $x+iy$:

(a) $(6)_{\frac{3\pi}{2}}$,

(b) $(14)_{15\pi}$,

(c) $(\frac{1}{4})_{-\frac{13\pi}{6}}$,

(d) $(2)_{-\frac{\pi}{8}}$,

3.3 Utilize fórmula de Moivre para encontrar as fórmulas de $\cos 3v$, $\sin 3v$, $\cos 4v$,$\sin 4v$.
Hint! Lembre-se:

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

3.4 Demostre, por exemplo por indução e usando as fórmulas de adição para *cos* e $\sin$, a fórmula de Moivre.

3.5 Resolve as Equações Binômios:

(a) $z^4=2$,

(b) $z^4=-1$,

(c) $z^3=-i$,

(d) $z^3=1-i$,

(e) $(z-1)^3=-1+i$,

(f) $(z+2)^4=8i$.

Em cada caso, indicar os raízes numa figura.

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

4 Equações Diferenciais Lineares com Coeficientes Constantes.

4.1 A Equação Homogênea.

Para a equação *linear*, homogênea de ordem n com *coeficientes constantes*:

$$(*): \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \quad t \in \mathbb{R},$$

Escreva:

$$\widehat{L}x = 0,$$

e notamos que a operadora $\widehat{L}$ é *linear*:

$$\begin{array}{ll} I: & \widehat{L}(x+y) = \widehat{L}x + \widehat{L}y \\ II: & \widehat{L}(\alpha x) = \alpha \widehat{L}x \end{array} \tag{1}$$

Procurando soluções da forma $\varphi(t) = ce^{\lambda t}$, temos:

$$\widehat{L}e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t}, \tag{2}$$

onde $P(\lambda)$ é o *Polinômio Caraterístico*:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

Equação (2) diz, que $e^{\lambda t}$ é autofunção da operadora $\widehat{L}$ com autovalor $P(\lambda)$. Se $\lambda \in \mathbf{C}$ é raíz em $P(\lambda)$, então as funções:

$$\varphi_\lambda(t) = ce^{\lambda t}, \quad c \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R}$$

são soluções do $(*)$.
Derivando Eq. (2) ao respeito de λ (derivação ao respeito de λ e t comutem):

$$\widehat{L}te^{\lambda t} = P'(\lambda)e^{\lambda t} + P(\lambda)te^{\lambda t}$$

Derivando novamente:

$$\widehat{L}t^2e^{\lambda t} = P''(\lambda)e^{\lambda t} + 2P'(\lambda)te^{\lambda t} + P(\lambda)t^2e^{\lambda t}$$

Generalizando:

$$\widehat{L}t^pe^{\lambda t} = \sum_{q=0}^{p} P^{(q)}(\lambda)t^{p-q}e^{\lambda t}, \quad p \geq 1$$

Se λ é um raíz, possivelmente complexa, de multiplicidade $1 \leq \rho \leq n$:

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = \ldots = P^{\rho-1}(\lambda) = 0$$

as ρ funções:

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \cdots, t^{\rho-1}e^{\lambda t}$$

são soluções linearmente independentes da equação homogênea: $\widehat{L}x = 0$. Qualquer combinação linear:

$$x(t) = c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t} + \ldots + c_\rho t^{\rho-1}e^{\lambda t}, t \in \mathbb{R}$$

é solução da equação homogênea.
No caso λ complexa, temos que se λ é raíz, então seu complex conjugada, $\overline{\lambda}$ também o é. Denotando: $\lambda = \alpha + i\beta$, a exponencial complexa é definida por:

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

Para um par de raízes complex conjugadas de multiplicidade ρ, as 2ρ funções:

$$e^{\lambda t}, e^{\overline{\lambda}t}, te^{\lambda t}, te^{\overline{\lambda}t}, \cdots, t^{\rho-1}e^{\lambda t}, t^{\rho-1}e^{\overline{\lambda}t}$$

são soluções linearmente independentes da equação homogênea, $(*)$. Temos:

$$c_+e^{(\alpha+i\beta)t} + c_-e^{(\alpha-i\beta)t} = c_1e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2e^{\alpha t}\sin\beta t$$

Assim, 2ρ soluções linearmente independentes para a equação homogênea, são:

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, \cdots, t^{\rho-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, t^{\rho-1}e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

e qualquer combinação linear:

$$x(t) = \left(c_1e^{\alpha t} + c_2te^{\alpha t} + \ldots + c_\rho t^{\rho-1}e^{\alpha t}\right)\cos\beta t + \left(d_1e^{\alpha t} + d_2te^{\alpha t} + \ldots + d_\rho t^{\rho-1}e^{\alpha t}\right)\sin\beta t, \quad t \in \mathbb{R}$$

é solução da equação homogênea. Pelo Teorema Fundamental do Álgebra, os n raízes geram n soluções linearmente independentes da equação homogênea, $(*)$. Através de uma Teorema de Existência e Unicidade, concluímos que estas combinações lineares constituem a solução completa.

4.2 A Equação Inhomogênea.

Consideramos a Equação Inhomogênea[2]:

$$(**) : \widehat{L}x = q(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}.$$

A Solução Completa da Equação Inhomogênea, SCEiH, é dado como a Solução Completa da Equação Homogênea, SCEH, mais ***uma*** Solução Particular da Equação Inhomogênea, SPEiH. Assim, para resolver $(**)$, basta encontramos uma solução particular da mesma. Para esse fim, escreve $q(t)$ como uma soma de funções elementares:

$$q(t) = a_1 q_1(t) + \ldots + a_k q_k(t).$$

E resolve:

$$(*)_k : \widehat{L}x = q_k(t), \quad t \in I.$$

Se $q_k(t) = t_m e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) e λ, não é raíz de ordem $\rho \geq 0$, uma solução particular é da forma ($\rho = 0$ corresponde ao caso λ não ser solução):

$$\varphi_k(t) = (A_0 t^\rho + A_1 t\rho + 1 + \ldots + A_m t^{\rho+m}) e^{\lambda t}, \quad A \in \mathbb{R} \quad (\mathbb{C})$$

A mesma idéia é aplicavel no caso $q_k(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$ (ponhe $\lambda = \alpha + i\beta$ a cima), mas nesse caso precisa-se incluir termos tanto de $\cos$ e $\sin$. Por exemplo, se:

$$q_k(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t,$$

uma solução particular será da forma:

$$\varphi_k(t) = Ae^{\alpha t}\cos\beta t + Be^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Um comentário similar vale para o caso $q_k(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$. Em ambos os casos, a utilização da exponencial compleza é vantajosa. No caso:

$$q_k(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t = Re\left(e^{(\alpha+i\beta)t}\right)$$

considere a equação diferencial complexa:

$$\widehat{L}z_k = e^{(\alpha+i\beta)t},$$

e resolve esta usando os resultados a cima. Terminado, a solução particular da equação original, é: $\varphi_k = Re\,(Z_k)$. Similarmente, para:

$$q_k(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t = Im\left(e^{(\alpha+i\beta)t}\right)$$

considere novamente:

$$\widehat{L}z_k = e^{(\alpha+i\beta)t}.$$

Resolvida, a solução particular da equação original, é: $\varphi_k = Im\,(Z_k)$.

4.3 Exercícios:

4.1 Encontrar a solução completa das equações diferenciais:

(a) $\dfrac{d^3x}{dt^3} - \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} - x = 0$

(b) $\dfrac{d^3x}{dt^3} - 3\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} - x = 0$

(c) $\dfrac{d^4x}{dt^4} + 2\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0$

(d) $\dfrac{d^4x}{dt^4} + x = 0$

(e) $\dfrac{d^4x}{dt^4} + 6\dfrac{d^3x}{dt^3} + 5\dfrac{d^2x}{dt^2} - 24\dfrac{dx}{dt} - 36x = 0$

(f) $\dfrac{d^6x}{dt^6} + 9\dfrac{d^4x}{dt^4} + 24\dfrac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$

4.2 Encontrar (i) a solução completa das equações diferenciais e (ii) a solução maximal passando pelos elementos de linha indicados:

(a) $\dfrac{d^3x}{dt^3} - \dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + 4x = 0, \quad (t_0, x_0, p_1, p_2) = (0, -3, -3, 3)$

(b) $\dfrac{d^3x}{dt^3} + 4\dfrac{dx}{dt} = 0, \quad (t_0, x_0, p_1, p_2) = (\pi, 2, -2, 4)$

(c) $\dfrac{d^4x}{dt^4} - 6\dfrac{d^3x}{dt^3} + 12\dfrac{d^2x}{dt^2} - 8\dfrac{dx}{dt} = 0 \quad (t_0, x_0, p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 0, -2, -4)$

4.3 Encontrar a solução completa das equações diferenciais:

(a) $\dfrac{d^3x}{dt^3} + 3\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} + x = e^t, \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $\dfrac{d^4x}{dt^4} + 16x = t^4, \quad t \in \mathbb{R}$

(c) $\dfrac{d^5x}{dt^5} + 4\dfrac{d^4x}{dt^4} = e^t + 3\sin 2t + t, \quad t \in \mathbb{R}$

(d) $\dfrac{d^3x}{dt^3} - 5\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} = -10e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}$

(e) $\dfrac{d^3x}{dt^3} - \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} = e^t, \quad t \in \mathbb{R}$

[2] Não homogênea

4.4 Encontrar a solução completa da equação diferencial:

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 5\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} - 4x = e^{2t}$$

4.5 Encontrar a solução completa das equações diferenciais:

(a) $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = e^t, \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = t^3, \quad t \in \mathbb{R}$

(c) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 5x = \cos t, \quad t \in \mathbb{R}$

(d) $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 2t^2 + 3, \quad t \in \mathbb{R}$

(e) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = -5\sin t, \quad t \in \mathbb{R}$

(f) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = e^{2t} + t, \quad t \in \mathbb{R}$

(g) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4x = 3e^t + 2\sin t, \quad t \in \mathbb{R}$

(h) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 8x = 2e^{2t}\cos 2t + \cos t, \quad t \in \mathbb{R}$

(i) $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 3\cos\frac{t}{2} + 2t^2 + 3, \quad t \in \mathbb{R}$

Encontrar a solução completa das equações diferenciais:

4.6 (a) $\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(c) $\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(d) $\frac{d^4x}{dt^4} + x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(e) $\frac{d^4x}{dt^4} + 6\frac{d^3x}{dt^3} + 5\frac{d^2x}{dt^2} - 24\frac{dx}{dt} - 36x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(f) $\frac{d^6x}{dt^6} + 9\frac{d^4x}{dt^4} + 24\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(g) $\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(h) $\frac{d^3x}{dt^3} + 4\frac{dx}{dt} = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(i) $\frac{d^4x}{dt^4} - 6\frac{d^3x}{dt^3} + 12\frac{d^2x}{dt^2} - 8\frac{dx}{dt} = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

5 Método de Coeficientes Indeterminados

Considerando um EDO *linear* e *normalizado*, de ordem dois:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p_1(t)\frac{dx}{dt} + p_0(t)x = q(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R},$$

e dado que $\varphi_1(t)$ é solução da equação homogênea, então (no intervalo I)

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t)\int \frac{1}{\varphi_1(t)^2}e^{-P_1(t)}dt = \varphi_1(t)I(t),$$

também é. Aqui, como acostumadamente: $P_1(t) = \int p_1 dt$. No mais, uma solução *particular* da equação inhomogênea é dado por:

$$\varphi_0(t) = \varphi_2(t)\int \frac{\varphi_1(t)q(t)}{W(t)}dt - \varphi_1(t)\int \frac{\varphi_2(t)q(t)}{W(t)}dt =$$

$$\varphi_2(t)I_1(t) - \varphi_1(t)I_2(t) = \begin{vmatrix} I_1(t) & I_2(t) \\ \varphi_1(t) & \varphi_2() \end{vmatrix}, \quad t \in I.$$

Nota-se, que o cálculo do $W(t)$ pode ser simplificado considerávelmente:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_1(t)I(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_1'(t)I(t) + \varphi_1(t)I'(t) \end{vmatrix} = \varphi_1(t)\cdot\varphi_1(t)I'(t)$$

Pela definição do integral $I(t)$:

$$I'(t) = \frac{1}{\varphi_1(t)^2}e^{-P(t)}$$

Então:

$$W(t) = \varphi_1(t)^2\frac{1}{\varphi_1(t)^2}e^{-P(t)} = e^{-P(t)}$$

5.1 Exercícios:

5.1 Para as Equações Diferencias abaixo, demostre que $\varphi_1(t)$ é solução, encontre a solução completa:

(a) $\frac{d^2x}{dt^2} - (1+2\tan^2 t)x = 0, \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \qquad \varphi_1(t) = \frac{1}{\cos t}$

(b) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\tan t\frac{dx}{dt} + 3x = 0, \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \qquad \varphi_1(t) = \sin t$

(c) $t\frac{d^2x}{dt^2} - (2t+1)\frac{dx}{dt} + (t+1)x = 0, \quad t > 0, \qquad \varphi_1(t) = e^t$

5.2 Para as Equações Diferencias abaixo, demonstre que $\varphi_1(t)$ é solução, encontre todas as soluções maximais:

(a) $\frac{d^2x}{dt^2} - \tanh t\frac{dx}{dt} - (1-\tanh^2 t)x = e^t, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_1(t) = \cosh t$

(b) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\tan t\frac{dx}{dt} + 3x = 3\tan t, \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \qquad \varphi_1(t) = \sin t$

(c) $t^2\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} + (t^2 - \frac{1}{4})x = t\sqrt{t}, \quad t > 0, \qquad \varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\cos t$

(d) $t^2\frac{d^2x}{dt^2} - 2t\frac{dx}{dt} - (t^2-2)x = t^3, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_1(t) = t\cosh t$

(e) $(1-t^2)\frac{d^2x}{dt^2} - t\frac{dx}{dt} + x = t, \quad -1 < t < 1, \qquad \varphi_1(t) = t$

(f) $t^2\frac{d^2x}{dt^2} - 2t\frac{dx}{dt} + (t^2+2)x = t^3, \quad t \neq 0, \qquad \varphi_1(t) = t\sin t$

(g) $\sin t\frac{d^2x}{dt^2} + 2\cos t\frac{dx}{dt} - \sin tx = 0, \quad t \neq p\pi, \qquad \varphi_1(t) = \frac{1}{\sin t}$

5.3 Considere uma EDO da forma:

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 t\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

Uma EDO deste tipo, é conhecido como um EDO de Euler (de segundo ordem).
Usando a substituição $u = \log t$ e $\varphi(t) = \psi(\log t)$, demonstre que em cada um dos intervalos, $t < 0$ resp. $t > 0$, a equação é equivalente à:

$$\frac{d^2x}{du^2} + (a_1 - 1)\frac{dx}{du} + a_0 x = 0, \quad u \in \mathbb{R}$$

Encontrar a solução completa das seguintes EDOs de Euler:

(a) $t^2\frac{d^2x}{dt^2} - 3t\frac{dx}{dt} + 3x = \frac{t^3}{1+t^2}, \quad t > 0$

(b) $t^2\frac{d^2x}{dt^2} - 4t\frac{dx}{dt} + 6x = 6(\log t)^2 + 2\log t + 4, \quad t > 0$

(c) $t^2\frac{d^2x}{dt^2} - 2t\frac{dx}{dt} + 2x = 2\,\mathrm{Arctan}\,t, \quad t > 0$

5.4 Encontrar a solução completa da EDO:

$$t(t+1)\frac{d^2x}{dt^2} + (2-t^2)\frac{dx}{dt} - (2+t)x = (t+1)^2, \qquad t > 0,$$

adivinhando uma função de potência como solução da equação homogênea.

5.5 Sabendo que tens soluções exponenciais, $\varphi_1(t) = e^{\alpha t}$, encontrar todas as soluções maximais das EDOs:

(a)

$$t(t+1)\frac{d^2x}{dt^2} + (2-t^2)\frac{dx}{dt} - (2+t)x = (t+1)^2, \qquad t > 0.$$

5.6 Sabendo que as equações homogêneas tens soluções polinomiais, encontrar todas as soluções maximais das EDOs:

(a) $(t-2)^2\frac{d^2x}{dt^2} - (t^2-2t)\frac{dx}{dt} + tx = 0, \qquad t \neq 2,$

(b) $(t^2+4)\frac{d^2x}{dt^2} - 2t\frac{dx}{dt} + 2x = 0, \qquad t \in \mathbb{R},$

(c) $(2t^3+t)\frac{d^2x}{dt^2} + (2t^2+3)t\frac{dx}{dt} - 8tx = 0, \qquad t \in \mathbb{R},$

(d) $\frac{1}{2}(t^2+1)\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} - x = \mathrm{Arctan}\,t, \qquad t \in \mathbb{R}.$

(e) $(t^2+1)\frac{d^2x}{dt^2} + 2t\frac{dx}{dt} - 2x = 4t^2 + 2, \qquad t \in \mathbb{R}.$

5.7 Sabendo que tens soluções potenciais, $\varphi_1(t) = t^\alpha$, encontrar todas as soluções maximais das EDOs:

(a) $2t^2\frac{d^2x}{dt^2} + 3t\frac{dx}{dt} - x = 9t^2 + 5t\sqrt{t}; \qquad t > 0,$

5.8 Encontrar todas as soluções maximais das equações diferenciais:

(a) $\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = e^t\cos^2 t, \qquad t \in \mathbb{R}$

(b) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + 2x = e^t \sin t, \qquad t \in \mathbb{R}$

(c) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + x = 2\dfrac{e^t}{t^3}, \qquad t \neq 0$

(d) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = -4\cos 2t, \qquad t \in \mathbb{R}$

(e) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - x = 4te^t, \qquad t \in \mathbb{R}$

(f) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 5x = -2e^{-2t} \sin t, \qquad t \in \mathbb{R}$

5.9 Encontrar todas as soluções maximais das EDOs:

(a) $\cosh t \dfrac{dx}{dt} + \sinh tx = 3\cosh 2t,\ t \in \mathbb{R}$

(b) $\sin t \dfrac{d^2x}{dt^2} - \cos t \dfrac{dx}{dt} = 1,\ t \in \mathbb{R}$

6 Séries de Potências e EDOs

Para alguns EDOs, particularmente do segundo ordem (tipicamente EDOs com coeficientes polinomiais): podemos encontrar soluções em forma de *séries de potências*:

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

onde x pertênce a um certo intervalo, *o intervalo de convergência*, $]-\lambda, \lambda[$. Mencionamos, que uma série de potência é *uniformamente convergente* no seu intervalo de convergência, isto é, podemos 'trocar somatório com derivação (integração)', ou seja:

$$y' = f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y'' = f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Mencionamos a função soma de umas séries de potências notáveis:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} = \cosh x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} = \cos x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad |x| < 1$$

$$(1-x)^\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad |x| < 1$$

Na última série, $\alpha \in \mathbb{R}$, aparece os coeficientes binomais generalizados:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Destacamos que no intervalo de convergência:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

6.1 Exercícios:

6.1 Encontrar intervalo de convergência para cada uma das séries de potência abaixo:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} x^n;$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{3^n} x^n$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[1-(-2)^n\right] x^n;$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} x^{2n};$

(e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^n} x^n;$

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n}+1\right)^n x^{3n};$

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} x^n;$

(h) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^n+b^n} x^n, \quad a \geq b > 0;$

(i) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n+1} x^n;$

(j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{2n} x^{2n};$

(k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!^2} x^n;$

(l) $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n^2} x^n.$

6.2 Encontrar a série de potência e seu intervalo de convergência das seguintes funções:

(a) $f(x) = \cos^2 x;$

(b) $f(x) = \sinh^2 x;$

(c) $f(x) = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$

(d) $f(x) = \frac{1}{2-x};$

(e) $f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2};$

(f) $f(x) = \log(1+x);$

(g) $f(x) = (1+x^2)\log(1+x);$

(h) $f(x) = \operatorname{Arctan} x;$

(i) $f(x) = \operatorname{Arctan} x + \log\sqrt{1+x^2};$

6.3 Encontrar intervalo de convergência e função soma, das seguintes séries de potência:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n;$

(c) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)} x^n;$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n} x^n;$

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n;$

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^n \frac{n+2}{n+1} x^n;$

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)!} x^n;$

(h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(2n+1)} x^{2n}$;

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n$;

(j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$;

(k) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} x^n$;

6.4 Dado a EDO:

$$(*): \quad \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2y = 0,$$

(a) Encontrar em forma de uma série de potência a solução de $(*)$, passando pelo elemento de linha $(0,1,0)$.

(b) Encontrar em forma de uma série de potência a solução de $(*)$, passando pelo elemento de linha $(0,0,1)$.

(c) Encontrar intervalo de convergência e função soma da série da questão anterior.

(d) Escreve a solução completa do $(*)$.

6.5 Dado a EDO:

$$(*): \quad x\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

(a) Encontrar em forma de uma série de potência a solução de $(*)$, passando pelo elemento de linha $(0,0,1)$.

(b) Encontrar intervalo de convergência e função soma da série do questão anterior.

(c) Qual séria a estratégia para encontrar a solução completa do $(*)$?

6.6 Dado a EDO:

$$(*): \quad (x-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

(a) Encontrar em forma de uma série de potência a solução de $(*)$, passando pelo elemento de linha $(0,0,1)$.

(b) Encontrar intervalo de convergência e função soma da série do questão anterior.

(c) Encontrar a solução completa do $(*)$ no intervalo $]-1,1[$.

6.7 Dado a EDO:

$$(*): \quad x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 4x^3y = 0,$$

(a) Encontrar em forma de uma série de potência, a solução, $\varphi(x)$, de $(*)$, tal que: $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ e $\varphi''(0) = 2$.

(b) Encontrar intervalo de convergência e função soma da série do questão anterior.

(c) Encontrar a solução completa do $(*)$.