Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@ufg.br - http://olepeter.ime.ufg.br

Curso: Matemática
Data: 22/07/2019
Disciplina: Cálculo 2
Prova: Substituitivo

1. (a) *1pt.* Encontre o polinômio de Taylor de ordem no máximo 3 da função $f(x) = x - \operatorname{Arctan} x$.
   (b) *1pt.* Encontre o polinômio de Taylor de ordem no máximo 3 da função $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$.
   (c) *1pt.* Encontre todos os constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, tal que o limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax^3 + bx^2 + cx + \log \dfrac{1+x}{1-x}}{x - \operatorname{Arctan} x}$$

existe e é finito. Nestes casos, qual o valor do limite?

Solution:

(a) Série geométrica:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \; |x| < 1$$

Substituindo $x \to -x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, \; |x| < 1$$

Uma série de potência é absolutamente convergente no interior do seu intervalo de convergência, podemos trocar a ordem de somatório e integração:

$$\operatorname{Arctan} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Isto mostra, que o Polinomio de Taylor de ordem n do $\operatorname{Arctan} x$ é:

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

Subtraindo:

$$x - \operatorname{Arctan} x = \frac{x^3}{3} + \ldots - (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

O Polinomio de Taylor de ordem 3 para $x - \operatorname{Arctan} x$ é:

$$P_3(x) = x - \operatorname{Arctan} x = \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$$

(b) Oberservamos que para $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$

Integrando:

$$\log \frac{1+x}{1-x} = \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \int_0^x 2\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\, dt =$$

$$2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Temos:

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \ldots + \frac{2}{2n+1}x^{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

O Polinomio de Taylor de ordem 3é:

$$Q_3(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + x^4\varepsilon(x)$$

(c)

$$\frac{ax^3 + bx^2 + cx + \log \frac{1+x}{1-x}}{x - \operatorname{Arctan} x} = \frac{(c+2)x + bx^2 + (a + \frac{2}{3})x^3 + x^4\varepsilon(x)}{\frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)}$$

Que é convergente, se e somenbte se: $c + 2 = 0 \wedge b = 0$. Nestes casos:

$$\frac{ax^3 + bx^2 + cx + \log \frac{1+x}{1-x}}{x - \operatorname{Arctan} x} = \frac{(a + \frac{2}{3})x^3 + x^4\varepsilon(x)}{\frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)} =$$

$$3a + 2 + x\varepsilon(x) \to a + \frac{2}{3}$$

para $x \to 0$.

2. Considere a função:

$$f(x,y)=x^2+y^2+e^{xy},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

   (a) *1pt.* Encontre seus pontos estacionários e os classifiquem.

   (b) *1pt.* Encontre a imagem da função em $\mathbb{R}^2$, respectivamente em $0<x^2+y^2<R^2$.

   Solution:

   (a) Derivadas parciais de 1º ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+ye^{xy},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y+xe^{xy}$$

   Pontos estacionários. Primeiro: $(0,0$ é estacionário. Mais, se: $y=0$, temos $x=0$ e vice-versa. Supondo $y\neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0\quad\Leftrightarrow\quad e^{xy}=-2\frac{x}{y}$$

   Segue, que x e y necessariamente tem sinais opostos. Inserindo na outra equação:

$$0=2y-2x\frac{x}{y}=2\cdot\frac{y^2-x^2}{y}\quad\Leftrightarrow\quad y=\pm x$$

   Somente $y=-x$ é possivel. Inserindo isso:

$$e^{-x^2}=2\quad\Leftrightarrow\quad x\in\emptyset$$

   Assim temos somente um ponto estacionário:

$$(x,y)=(0,0)$$

   Derivadas de 2º ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2+y^2e^{xy},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(1+xy)e^{xy},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2+x^2e^{xy}$$

   Em $(x,y)=(0,0)$:

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

   Polinômio caraterístico: $(2-\lambda)^2-1=0\ \Leftrightarrow\ 2-\lambda=\pm 1\ \Leftrightarrow\ \lambda=1\vee\lambda=3$, ambos positivos. Assim $(0,0)$ é um mínimo local:. $f(0,0)=1$.

   (b) Claramente: $f(x,y)\geq e^{xy}$ para $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, onde igualdade vale somente se $(x,y)=(0,0)$. Mais:

$$\lim_{t\to\pm\infty}f(t,t)=+\infty$$

   Assim: Im($\mathbb{R}^2$)= $[1,+\infty]$. Nos círculos $x^2+y^2=R^2$:

$$x=R\cos\theta,\quad x=R\sin\theta,$$

   $0\leq\theta\leq 2\pi$:

$$g(\theta)=f(R\cos\theta,R\sin\theta)=R^2+e^{\frac{1}{2}R^2\sin 2\theta}$$

   Derivando:

$$g'(\theta)=R^2\cos 2\theta e^{\frac{1}{2}R^2\sin 2\theta}=0\quad\Leftrightarrow\quad\cos 2\theta=0\quad\Leftrightarrow\quad 2\theta=\frac{\pi}{2}+p\pi\quad\Leftrightarrow\quad\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{p\pi}{2}$$

   Concluimos:

$$R^2+e^{-\frac{1}{2}R^2}\leq g(\theta)\leq R^2+e^{\frac{1}{2}R^2}$$

   E, finalmente: Im($x^2+y^2<R^2$)= $[1,R^2+e^{\frac{1}{2}R^2}[$.

3. Um conjunto, $\mathcal{C}$, é limitado pelas curvas:

$$xy=a,\quad xy=b,\quad xy^3=\alpha,\quad xy^3=\beta,$$

   $0<a<b$, $0<\alpha<\beta$ e a substituição:

$$u(x,y)=xy\quad\wedge\quad v(x,y)=xy^3$$

   (a) *1pt.* Desenhe o conjunto e encontre (x,y) em termos de u e v: $x=x(u,v)$, $v=v(u,v)$.

   (b) *1pt.* Encontre o Jacobiante tanto em termos de x e y: $\mathcal{J}(x,y)$, como em termos de u e v: $\mathcal{J}^*(u,v)$. Qual relação entre os dois?

   (c) *1pt.* Encontre a área, A, do $\mathcal{C}$.

(d) *1pt.* Supondo uma masse uniformamente distribuido, $\rho(x,y) = 1$, encontre o centro de masse do C:

$$C = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \frac{1}{A}\int_C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\, dxdy$$

Solution:

(a) Observe: $x = 0 \vee y = 0 \ \Rightarrow\ u = v = 0$. Suponhamos $x > 0$ e $y > 0$.

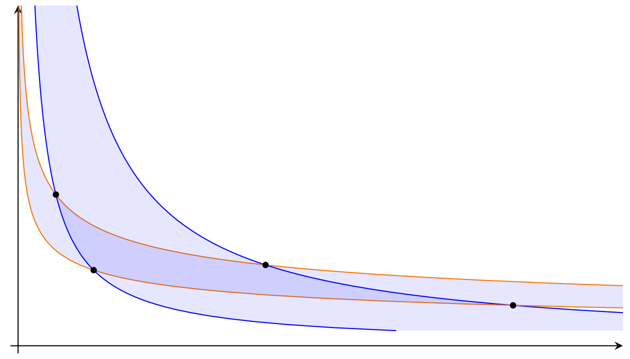
$$\frac{v}{u} = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{\frac{v}{u}}$$

Inserindo:

$$x = \frac{u}{y} = u\sqrt{\frac{u}{v}} = \sqrt{\frac{u^3}{v}}$$

Estritamente, temos também $x < 0 \wedge y < 0$, com $u > 0 \wedge v > 0$:

$$x = -\sqrt{\frac{u^3}{v}}, \quad y = -\sqrt{\frac{v}{u}}$$



(b) Derivadas parciais:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y^3, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3xy^2$$

Jacobiante:

$$\mathcal{J}(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y^3 \\ x & 3xy^2 \end{vmatrix} = 3xy^3 - xy^3 = 2xy^3$$

Em (u,v):

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u^3}{v^3}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u^3}}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2\sqrt{uv}}$$

Jacobiante:

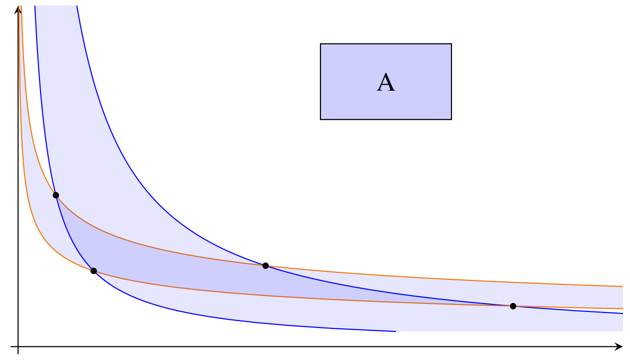
$$\mathcal{J}^*(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u^3}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u^3}{v^3}} & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \end{vmatrix} = \frac{3}{4v} - \frac{1}{2v} = \frac{1}{2v}$$

Naturalmente: $\mathcal{J}^*(u,v) = \frac{1}{\mathcal{J}(x,y)}$, cf:

$$dxdy = \mathcal{J}^*(u,v)\, dudv \quad \Leftrightarrow \quad dudv = \mathcal{J}(x,y)\, dxdy$$

(c)

$$A = \int_a^b \int_\alpha^\beta \frac{1}{2v}\, dudv = \frac{1}{2}\left[u\right]_a^b \left[\log v\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{2}(b-a)\log\frac{\beta}{\alpha}$$



```
%Calculate area
\pgfmathparse{\b-\a} \let\A\pgfmathresult;
\pgfmathparse{\A*ln(\Beta/\Alpha)} \let\A\pgfmathresult;
\pgfmathparse{0.5*\A} \let\A\pgfmathresult;

\coordinate (P1) at (4,3);
\coordinate (P2) at (4+\A,4);

\draw [draw=black,fill=blue, opacity=0.1] (P1) rectangle (P2);
\draw [draw=black,fill=blue, opacity=0.1] (P1) rectangle (P2);
\draw [draw=black] (P1) rectangle (P2) node[color=black,pos=.5] {A};
```

(d)

$$I_x=\int_a^b\int_\alpha^\beta x\frac{1}{2v}\,dudv=\int_a^b\int_\alpha^\beta\sqrt{\frac{u^3}{v}}\frac{1}{2v}\,dudv=\frac{1}{2}\int_a^b u^{3/2}\,du\int_\alpha^\beta v^{-3/2}\,dv=$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{1+3/2}u^{1+3/2}\right]_a^b\cdot\left[\frac{1}{1-3/2}u^{1-3/2}\right]=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{1}\cdot\left(b^{5/2}-a^{5/2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)=$$
$$\frac{2}{5}\cdot(b^{5/2}-a^{5/2})\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

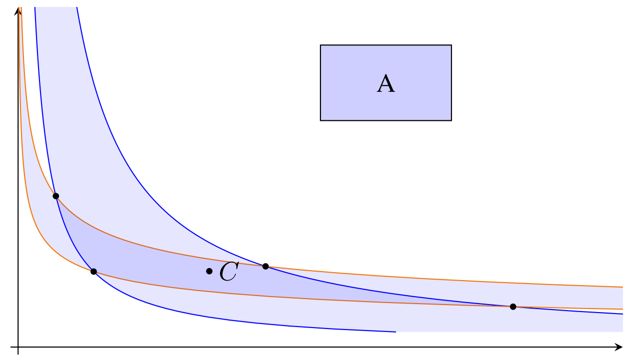
Então:

$$x_c=\frac{4}{5}\cdot\frac{b^{5/2}-a^{5/2}}{b-a}\cdot\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}\log\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$I_y=\int_a^b\int_\alpha^\beta y\frac{1}{2v}\,dudv=\int_a^b\int_\alpha^\beta\sqrt{\frac{v}{u}}\frac{1}{2v}\,dudv=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{1}{\sqrt{u}}\,du\int_\alpha^\beta\frac{1}{\sqrt{v}}\,dv=$$
$$\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{1-1/2}\sqrt{u}\right]_a^b\left[\frac{1}{1-1/2}\sqrt{v}\right]_\alpha^\beta=$$
$$2(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$$

Enfim:

$$y_c=2\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{b-a}\frac{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})}{\log\frac{\beta}{\alpha}}$$




```
%Calculate Ix, then xc
\pgfmathparse{\b*\b*sqrt(\b)-\a*\a*sqrt(\a)} \let\Ix\pgfmathresult;
\pgfmathparse{(1/sqrt(\Alpha)-1/sqrt(\Beta))*\Ix} \let\Ix\pgfmathresult;
\pgfmathparse{2.0/5.0*\Ix} \let\Ix\pgfmathresult;

\pgfmathparse{\Ix/\A} \let\xc\pgfmathresult;

%Calculate Iy, then yc
\pgfmathparse{sqrt(\b)-sqrt(\a)} \let\Iy\pgfmathresult;
\pgfmathparse{2.0*\Iy/(sqrt(\Beta)-sqrt(\Alpha))} \let\Iy\pgfmathresult;

\pgfmathparse{\Iy/\A} \let\yc\pgfmathresult;

\filldraw (\xc,\yc) circle(1pt) node [right]{$C$};
```

4. (a) *1pt.* Encontre a série de potência para a função:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^4}$$

Qual seu intervalo de convergência, $]-\lambda,\lambda[$. A série é convergente nos pontos finais do intervalo? Qual seu limite?

(b) *1pt.* Encontre, em termos de uma serie infinita, os valores do integral:

$$\int_0^a\frac{1}{1+x^4}\,dx,$$

onde $0<a<1$. O que acontece com o integral, quando $a\to 1$?

Solution:

(a) Usando mnovamente a série geométrica:

$$\frac{1}{1+x^4}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{4n},\ |x|<1$$

Assim, $\lambda=1$ e a some nos pontos finais, são:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n,$$

Que é divergente para $x=\pm 1$. Observe:

$$f(\pm 1)=\frac{1}{2}$$

Isso é uma contradição?

(b) No interior do intervalo de convergência, a série de potência é uniformamente convergente, assim podemos trocar a ordem de somar e integrar:

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^4}=\int_0^a\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{4n}\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^a x^{4n}\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{a^{4n+1}}{4n+1},\ |a|<1$$

Nos fins do intervalo, temos a série:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1},$$

que é condicionalmente convergente, a soma sendo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{11}-...+(-1)^n\frac{1}{4n+1}-=\int_0^1\frac{dx}{1+x^4}$$

Código LaTeX/TikZ para a figura em item 3.a:

```
\pgfmathparse{8} \let\xr\pgfmathresult;
\pgfmathparse{4.5} \let\yt\pgfmathresult;
\pgfmathparse{-0.1} \let\xl\pgfmathresult;
\pgfmathparse{-0.1} \let\yb\pgfmathresult;


\clip (\xl,\yb) rectangle (\xr,\yt);
\draw [>=stealth,->] (\xl,0) -- (\xr,0) node [right] {$x$};
\draw [>=stealth,->] (0,\yb) -- (0,\yt) node [above] {$y$};

\pgfmathparse{1} \let\a\pgfmathresult;
\pgfmathparse{3.5} \let\b\pgfmathresult;
\pgfmathparse{1} \let\Alpha\pgfmathresult;
\pgfmathparse{4} \let\Beta\pgfmathresult;

\pgfmathparse{0.2} \let\YB\pgfmathresult;
\pgfmathparse{8} \let\YT\pgfmathresult;

\draw [color=blue,name path=a,samples=200,domain=\YB:\YT] plot ({\a/\x}, {\x});
\draw [color=blue,name path=b,samples=200,domain=\YB:\YT] plot ({\b/\x}, {\x});

\draw [color=orange,name path=alpha,samples=200,domain=\YB:\YT] plot ({\Alpha/(\x*\x*\x)}, {\x});
\draw [color=orange,name path=beta, samples=200,domain=\YB:\YT] plot ({\Beta/(\x*\x*\x)},
{\x});

\tikzfillbetween[of=a and b]{blue, opacity=0.1};
\tikzfillbetween[of=alpha and beta]{blue, opacity=0.1};

\foreach \t in {\a,\b} {
  \pgfmathparse{sqrt(\Alpha/\t)} \let\y\pgfmathresult;
  \pgfmathparse{sqrt(\t*\t*\t/\Alpha)}\let\x\pgfmathresult;
  \filldraw (\x,\y) circle(1pt);
}
\foreach \t in {\a,\b} {
  \pgfmathparse{sqrt(\Beta/\t)} \let\y\pgfmathresult;
  \pgfmathparse{sqrt(\t*\t*\t/\Beta)}\let\x\pgfmathresult;
  \filldraw (\x,\y) circle(1pt);
}
```