Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@ufg.br - http://www.olesmith.com.br

Prova:	1
Semestre:	2020.1
Data:	11-14/09/2020
Disciplina:	Geometria Analítica
Curso:	Prof MAT

1. Dado três vetores ortonormais, $(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3)$, em $\mathbb{R}^3$: $\underline{\mathbf{v}}_i \cdot \underline{\mathbf{v}}_j = \delta_{ij}$, considere a matriz (soma pontuado de diádicos):

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda_1 \underline{\mathbf{v}}_1 \underline{\mathbf{v}}_1^T + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}_2 \underline{\mathbf{v}}_2^T + \lambda_3 \underline{\mathbf{v}}_3 \underline{\mathbf{v}}_3^T,$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

(a) *1 pt.* Demostre que $\underline{\mathbf{v}}_1$, $\underline{\mathbf{v}}_2$, $\underline{\mathbf{v}}_3$ são autovetores da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ e encontre seus autovalores.
Colocando:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{v}}_3 = \underline{\mathbf{v}}_1 \times \underline{\mathbf{v}}_2$$

Calcule o vetor $\underline{\mathbf{v}}_3$ e escreve a relação entre coordenadas novas e coordenadas antigas, num sistema de coordenadas com eixos paralelas à $\underline{\mathbf{v}}_1$, $\underline{\mathbf{v}}_2$, $\underline{\mathbf{v}}_3$.

(b) *1 pt.* No sistema de coordenadas nova acima, encontre, em coordenadas novas, a equação de elipsoid com centro em $(x', y', z') = (1, 1, 1)$ e semieixos, respectivamente, $2, 3$ e 3 .

(c) *1 pt.* Encontre a equação do elipsoid acima em coordenadas antigas, x, y, z.

(d) *1pt*
Esboçar o elipsoid e encontrar equações para seus planos de simetria. Justifique que o elipsoid é de revolução e encontre uma parametrização do eixo de revolução.

2. Dado os planos:

$$\alpha_1 : \ x + 3z = 3, \qquad \alpha_2 : \ 3x + z = 1, \qquad \alpha_3 : \ y = 1.$$

(a) *1 pt.* Encontre uma parametrização das retas de interseção:

$$l_1 : \ \alpha_2 \cap \alpha_3, \qquad l_2 : \ \alpha_3 \cap \alpha_1, \qquad l_3 : \ \alpha_1 \cap \alpha_2.$$

Demostre que as 3 retas se intersecionam num único ponto, S, e encontre as coordenadas deste.

(b) *1 pt.* Encontre as projeções perpendiculares do origem, $O(0,0,0)$, nas retas l_1, l_2 e l_3.

(c) *1 pt.* Demostre que as projeções da questão anterior pertencem a um plano contendo o eixo z. Encontre uma equação desse plano.

(d) *1 pt.* Considere o cubo de unidade. Encontre uma parametrização das retas contendo as diagonais (espaciais) do cubo. As diagonais se intersectam sobre um ângulo reto?

3. A hipotrocoide é uma rolete traçada por um ponto fixo de um círculo de raio $r > 0$ que rola dentro de um círculo de raio $R > 0$ fixo, onde o ponto está a uma distância $d > 0$ do centro ao círculo interno. Estre curva é parametrizada por:

$$\underline{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} (R-r)\cos t + d\cos\left(\frac{R-r}{r}t\right) \\ (R-r)\sin t - d\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right) \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

A tabela na próxima página resume as propriedades geométricas do hipotrocoide.

(a) *1 pt.* Justifique a parametrização do hipotrocoide a partir do rolamento mencionado acima.

(b) *2 pts.* Justifique as expressões na tabela, relacionando as quantias aparecendo nesta, com as dados da parametrização.
Quais os pontos singulares do hipotrocoide?

(c) *1 pt.* No caso $d = r$ o hipotrocoide é chamado de hipocicloid. Escreve a tabela neste caso e demostre, que um hipocicloid tem velocidade ângular ($\omega(t)$ na tabela) constante.

(d) *2pts.* Demostre que a evoluta ($\underline{\mathbf{c}}(t)$ na tabela) de um hipocicloid é, novamente, um hipocicloid e encontre seus parâmetros.
Demostre, também, que a evoluta de um *verdadeiro* hipotrocoide ($d \neq r$) *não* é um hipotrocoide.

(e) *2 pts.* É possivel mostrar, que a evoluta de uma curva tem pontos singulares, se e somente se: $\rho'(t) = 0$.
Classifique a família dos hipotrocoides em termos da quantia de pontos singulares das suas evolutas.

Property		Expression	Property		Expression
$\underline{\mathbf{r}}(t)$	$=$	$r\left\{\omega\underline{\mathbf{e}}(t)-\lambda\underline{\mathbf{p}}(\omega t)\right\}$	$\underline{\mathbf{r}}'(t)$	$=$	$r\omega\left\{\underline{\mathbf{f}}(t)+\lambda\underline{\mathbf{q}}(\omega t)\right\}$
$\underline{\mathbf{r}}''(t)$	$=$	$r\omega\left\{-\underline{\mathbf{e}}(t)+\lambda\omega\underline{\mathbf{p}}(\omega t)\right\}$	$\widehat{\underline{\mathbf{r}}}'(t)$	$=$	$r\omega\left\{-\underline{\mathbf{e}}(t)-\lambda\underline{\mathbf{p}}(\omega t)\right\}$
$v(t)^2$	$=$	$r^2\omega^2\left\{1+\lambda^2-2\lambda\cos{(\omega+1)t}\right\}$	$D(t)$	$=$	$r^2\omega^2\left\{1-\lambda^2\omega+\lambda(\omega-1)\cos{(\omega+1)t}\right\}$
$\underline{\mathbf{t}}(t)$	$=$	$\dfrac{r\omega\left\{\underline{\mathbf{f}}(t)+\lambda\underline{\mathbf{q}}(\omega t)\right\}}{\sqrt{r^2\omega^2\left\{1+\lambda^2-2\lambda\cos{(\omega+1)t}\right\}}}.$	$\underline{\mathbf{n}}(t)$	$=$	$\dfrac{r\omega\left\{-\underline{\mathbf{e}}(t)-\lambda\underline{\mathbf{p}}(\omega t)\right\}}{\sqrt{r^2\omega^2\left\{1+\lambda^2-2\lambda\cos{(\omega+1)t}\right\}}}.$
$\omega(t)$	$=$	$\dfrac{1}{\varphi(t)}$	$\varphi(t)$	$=$	$\dfrac{1+\lambda^2-2\lambda\cos{(\omega+1)t}}{1-\lambda^2\omega+\lambda(\omega-1)\cos{(\omega+1)t}}$
$\kappa(t)$	$=$	$\dfrac{1}{r\omega}\cdot\dfrac{1-\lambda^2\omega+\lambda(\omega-1)\cos{(\omega+1)t}}{\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos{(\omega+1)t}}^3}$	$\rho(t)$	$=$	$\dfrac{\left(r^2\omega^2\left\{1+\lambda^2-2\lambda\cos{(\omega+1)t}\right\}\right)^{3/2}}{\left(r^2\omega^2\left\{1-\lambda^2\omega+\lambda(\omega-1)\cos{(\omega+1)t}\right\}\right.}$

$$\underline{\mathbf{c}}(t) = r\left\{\omega(1-\varphi(t))\underline{\mathbf{e}}(t)-\lambda(1+\omega\varphi(t))\underline{\mathbf{p}}(\omega t)\right\}$$