Fundamentos de Geometria

Prof. Genésio Lima dos Reis

Instituto de Matemática e Estatística,
Universidade Federal de Goiás

22 de outubro de 2019

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Incidência

{roteiro:1}

1.1 Roteiro 1. Incidência

Conteúdo: O que é teoria? O que é definição de objeto matemático? O que é axioma? O que é teorema? O que é demonstração de teorema? O que é sistema axiomático? Termos primitivos da geometria plana: ponto e reta. Relação de incidência. Axiomas de incidência. Quantos pontos uma reta possui? Quantos pontos o plano possui? Modelo para um sistema axiomático.

Item 1.1. Contextualização histórica: De Tales a Euclides. "Os Elementos"(exposta oralmente). Contextualização dentro do curso (exposta oralmente). {item:1:1}

Item 1.2. O que é teoria? Consulta no Dicionário Aurélio: Do grego: theoría, 'ação de contemplar, examinar'. {item:1:2}

(a) Conhecimento especulativo, meramente racional.

(b) Conjunto de princípios fundamentais duma arte ou duma ciência.

(c) Doutrina ou sistema fundado nesses princípios.

(d) (Filosofia.) [Teoria é] Conjunto de conhecimentos não ingênuos que apresentam graus diversos de sistematização e credibilidade, e que se propõem explicar, elucidar, interpretar ou unificar um dado domínio de fenômenos ou de acontecimentos que se oferecem à atividade prática.

(e) (Lógica.) [Teoria é] Do ponto de vista estritamente formal, o sistema de proposições em que não se encontram proposições contraditórias, nem nos axiomas, nem nos teoremas que deles se deduzem.

(f) Teoria das idéias. (Filosofia.) Doutrina fundamental do platonismo, que consiste em conceber entidades eternas e imutáveis que seriam objeto de conhecimento verdadeiro e de que as coisas do mundo sensível constituiriam pálidos reflexos.

{item:1:3} ***Item 1.3.*** Uma teoria é constituída de objetos e afirmações a respeito dos objetos.

Exemplo de teoria: geometria euclidiana; os seus objetos são ponto, reta, ângulo, triângulo, etc; exemplos de afirmações: por dois pontos passa uma e uma só reta; as diagonais de um retângulo são iguais.

{item:1:4} ***Item 1.4.*** O enunciado de uma afirmação consiste de uma hipótese e de uma tese. A hipótese é aquilo que se admite como sendo dado. A tese é aquilo que está assegurado na presença da hipótese.

{item:1:5} ***Item 1.5.*** O que é demonstração de uma afirmação? O que é axioma? O que é teorema?

Uma prova ou demonstração de uma afirmação é uma seqüência de afirmações, acompanhadas de suas justificativas, que conduzem à tese. A justificativa de cada afirmação que aparece numa demonstração é feita através de afirmações estabelecidas anteriormente. Assim, provar ou demonstrar uma afirmação é mostrar como ela decorre logicamente de outras afirmações já estabelecidas anteriormente. Para que a cadeia de demonsirações de afirmações não se estenda para trás indefinidamente é inevitável que se concorde em aceitar algumas afirmações sem demonstração. As afirmações aceitas sem demonstração são chamadas de axiomas ou postulados. As afirmações que são demonstradas são denominadas de teoremas, proposições, corolários ou lemas.

{item:1:6} ***Item 1.6.*** O que é definição de um objeto? O que é objeto primitivo? E objeto definido?

A definição de um objeto é o enunciado das propriedades caracterizadoras do objeto. As propriedades caracterizadoras servem para distinguir o objeto definido dos outros objetos. Objetos, termos e conceitos são sinônimos. Exemplo de definição: retângulo é um paralelogramo que tem os quatro ângulos retos. Portanto, um objeto é retângulo se for paralelogramo e se seus ângulos forem retos. Uma condição que deve cumprir uma definição é a de que os termos que aparecem no seu enunciado deverão ter sido estabelecidos anteriormente. Assim, os termos paralelogramo e ângulo reto que aparecem na definição de retângulo terão que ser definidos anteriormente. Para que a cadeia de definições de objetos não se estenda para trás indefinidaménte é inevitável que se concorde em adotar alguns objetos sem definição. Os objetos aceitos sem definição são chamados de objetos ou termos primitivos ou não-definidos. Os outros são objetos der dos ou definidos.

Item 1.7. De que é constituído um sistema axiomático? {item:1:7}

Um sistema axiomático é constituído de objetos não-definidos, objetos definidos, relações entre objetos, axiomas e teoremas.

Item 1.8. Começando a construir uma geometria plana. {item:1:8}

Objetos primitivos: ponto e reta.
Relação primitiva: [ponto] pertence à [retal ("relação de incidência").
Neste curso estudamos apenas a geometria plana; sendo assim, plano é definido como o conjunto de todos os pontos. Quando se estuda a geometria espacial, plano é um conceito primitivo.
Como não sabemos o que é "ponto", "reta"e nem o que é a relação "pertence à", como é que vamos trabalhar com eles? Resposta: os axiomas é que nos dão as primeiras propriedades desses objetos e que nos instrumentalizam para manipulá-los. Nada podemos afirmar sobre esses objetos que não seja decorrente dos axiomas. Começamos a enunciá-los.

Item 1.9. Primeiro axioma, I_1: {item:1:9} {ax:I1}

Axioma 1 (I_1)**.** *Qualquer que seja a reta, existe ponto que pertence a ela e existe ponto que não pertence a ela.*

Primeiramente, uma questão de linguagem. Usamos a expressão "existe ponto"com o mesmo sentido de "existe pelos menos um ponto". Não significa nem que "existe exatam ente um ponto", nem que "existe mais de um ponto". Toda afirmação matemática pode ser escrita na forma: "Se [hipótese], então [tese]."Numa dada situação em que a hipótese está presente, vale também a tese. Dizemos que a hipótese implica a tese, ou que a tese é conseqüência da hipótese. Na forma "se ..., então ...", o Axioma I_1 pode ser escrito: Se r é uma reta qualquer, então existe uni ponto P pertencente a r e existe um ponto Q não pertencente a r. Assim, a hipótese e a tese deste axioma são:
Hipótese: r é uma reta.
Tese:

(a) existe um ponto P pertencente a r;

(b) existe um ponto Q não pertencente a r.

A parte (a) da tese nos diz que reta é um conjunto não vazio, isto é, toda reta possui pelo menos um ponto, enquanto a parte (b) diz qde uma reta não contém todos os pontos do plano.

Item 1.10. Segundo axioma, I_2: {item:1:10}

{ax:I2}

Axioma 2 (I_2). *Dois pontos determinam uma reta.*

Em outras palavras, dados dois pontos distintos quaisquer, existe uma e uma só reta que os contém. Para este axioma temos:
Hipótese: A e B são dois pontos.
Tese:

(a) existe uma reta r que contém A e B;

(b) r é única; isto é, se s é unia reta que contém A e B então $s = r$.

Na prática, o uso do fato de que r é única é como explicado no item (b): quando se tem duas retas r e s que contém os pontos A e B, então $s = r$. Isto significa que todo ponto de s é ponto de r, e vice-versa.

{item:1:11} ***Item 1.11.*** Quantos pontos uma reta possui?
A pergunta assim colocada é ambígua. O que perguntamos é o seguinte: Podendo utilizar apenas os axiomas I_1 e I_2, quantos pontos podemos garantir que uma reta possui?

Resposta tentativa: pelo menos dois (???). Com esta resposta enunciamos a seguinte afirmação, que deve ser provada.
Afirmação. Qualquer reta possui pelo menos 2 pontos (???). (Enunciado na forma "Se ... , então ... ": Se r é uma reta, então existem dois pontos em r (???).)
Hipótese: r é uma reta qualquer
Tese: existem dois pontos em r
Tentativa de demonstração (dada por um aluno em classe).

Afirmações	**Justificativas**
1. Seja r uma reta qualquer	1. hipótese
2. Seja A um ponto de r e seja B um ponto fora de r	2. axioma h
3. Seja s a reta determinada por A e B A reta s tem dois pontos, como queríamos provar!!!??? (erro!)	3. axioma I,

Onde está o erro da tentativa de demonstração acima? Resposta: o que foi provado aqui é que a reta s determinada pelos pontos A e B possui dois pontos. Acontece que a reta s é uma reta particular: a reta determinada pelos pontos A e B. O que se quer provar é que uma reta **qualquer** r possui dois pontos, o que não foi provado acima.

Depois de algumas discussões em sala chegou-se a pensar que: "Parece"que, usando apenas os dois axiomas, é impossível provar que uma reta qualquer possui dois pontos. Mas como provar isto, ou seja, que é impossível provar que uma reta possui pelo menos dois pontos? Para se provar que uma afirmação é falsa, constrói-se um contra-exemplo, isto é, um exemplo particular que contraria a afirmação. No caso de geometria, um exemplo concreto é o que é denominado modelo para a geometria.

Item 1.12. O que é modelo para uma geometria? {item:1:12}

Um modelo para uma geometria definida por um conjunto de axiomas é dado por uma representação dos seus termos e relações primitivos por outros objetos e relações que satisfaçam os axiomas. Modelos desempenharão papel fundamental neste curso, tanto no aspecto pedagógico quanto no lógico. Os modelos servem para se dar exemplos e contra-exemplos para algumas afirmações.

Item 1.13. Exemplo de modelo com três pontos que satisfaz os dois axiomas de incidência. {item:1:13}

Neste exemplo, os pontos são letras A, B, ..., e as retas são conjuntos de letras $\{A\}$, $\{A, B\}$,.. . A relação de incidência "ponto pertence à reta"é interpretada por "letra pertence a conjunto".
Tentemos construir um modelo com dois pontos A e B. Para satisfazer o Axioma I_1, o conjunto $\{A, B\}$ terá que ser uma reta. Mas o Axioma I_2. exige a existência de um terceiro ponto C não pertencente à reta $\{A, B\}$. Logo, não existe modelo com dois pontos, satisfazendo os dois axiomas.
Tentemos, pois, um modelo com três pontos A, B e C. Como, para cada dois pontos distintos, deve existir uma reta que os contém (Axioma I_2) deveremos ter pelo menos três retas: $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ e $\{B, C\}$ (já que não se pode ter a reta $\{A, B, C\}$, porque isto obrigaria a se ter um quarto ponto, fora desta reta). Para que se tenha de fato um modelo, resta mostrar que os axiomas I_1 e I_2 estão satisfeitos.

(a) Verificação de que o Axioma I_1está satisfeito. Devemos exibir, para cada reta, um ponto pertencente a ela e um ponto não pertencente a ela. O quadro abaixo mostra isto.

Reta	**(a) Ponto pertencente à reta**	**(b) Ponto não pertencente à reta.**
$\{A, B\}$	A	C
$\{A, C\}$	A	B
$\{B, A\}$	B	A

(b) Verificação de que o Axioma I_2 está satisfeito. Para cada dois pontos distintos, devemos mostrar que existe uma e uma só reta que os contém. O quadro abaixo mostra, para cada par de pontos, a única reta que os contém.

{item:1:14} ***Item 1.14.*** Outro exemplo de modelo que satisfaz os axiomas I_1 e I_2.

Os pontos são as letras A, B e C. As retas são os conjuntos de letras $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$ e $\{A\}$. Agora, o quadro que se usa para mostrar que o Axioma I_1, está satisfeito é o seguinte:

Reta	**(a) Ponto pertencente à reta**	**(b) Ponto não pertencente à reta**
$\{A, B\}$	A	C
$\{A, C\}$	A	B
$\{3, C\}$	B	A
$\{A\}$	A	B

Para o restante, nada muda. Você está surpreso com a reta $\{A\}$, que é constituída só de um ponto? O fato é que ela também satisfaz o 'Axioma I_1, como as outras. Quanto ao Axioma I_2, na sua hipótese não aparece reta; logo a reta $\{A\}$ não tem que ser testada neste axioma.

{item:1:15} ***Item 1.15.*** **Propriedade fundamental dos modelos.** *Qualquer teorema que se pode provar com os axiomas de incidência é válido em-qualquer modelo que satisfaça os axiomas de incidência.*

Isto acontece porque, como o teorema decorre dos axiomas, e os axiomas são válidos no modelo, segue que o teorema também é válido no modelo.

{item:1:16} ***Item 1.16.*** Como se prova que é impossível provar (estando valendo apenas os dois axiomas de incidência) que cada reta possui pelo menos dois pontos?

Resposta: dando um contra-exemplo, isto é, exibindo um modelo que satisfaz os dois axiomas de incidência, tendo uma de suas retas apenas 1 ponto. Um modelo assim foi construído no item 14.
De fato, queremos provar que a afirmação "Cada reta possui pelo menos 2 pontos"é falsa. Para isto, basta dar um contra-exemplo para ela. O modelo constituído dos pontos A, B, C e das retas $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$, $\{A\}$ é um contra-exemplo para a afirmação,pois possui uma reta com 1 só ponto. Pela propriedade fundamental dos modelos, se a afirmação fosse verdadeira, isto é, fosse um teorema decorrente dos dois axiomas, ela deveria ser válida em qualquer modelo satisfazendo os dois axiomas.

{item:1:17} ***Item 1.17.*** Quantos pontos existem? (Melhor: Utilizando apenas os axiomas I_1 e I_2, quantos pontos podemos provar que existem?)

Não pense que o axioma I_2 garante a existência de dois pontos Tente provar que existe pelo menos um ponto. Se conseguir mostre o seu argumento para um colega; provavelmente ele vai descobrir um erro.

Item 1.18. Quantas retas existem? (Melhor: Utilizando apenas os axiomas e 12, quantas retas podemos afirmar que existem?) {item:1:18}

Se você conseguir provar que existe pelo menos uma reta, desconfie da sua demonstração.

Item 1.19. Depois de algumas tentativas chega-se à conclusão de que "parece que não dá para provar que existem pontos e que existem retas". {item:1:19}

Uma interpretação equivocada de vários alunos é a de que a hipótese do axioma I_2 (A e B são dois pontos) garante que existem dois pontos. Não é assim! O que qualquer enunciado garante é que, se *as condições enunciadas na hipótese* estiverem presentes então a tese está garantida. Só se pode aplicar o Axioma I_2, se outros argumentos conduzirem à presença de dois pontos.
Por exemplo, na afirmação "se chover amanhã, então não irei ao clube", não está assegurado que vai chover amanhã (a hipótese). O que está assegurado é que não irei ao clube (tese), se as condições da hipótese estiverem presentes (*se chover amanhã*).

Item 1.20. Resumindo, o axioma I_1 não afirma que existe reta; o que ele afirma é que se nos for dada uma reta, então podemos tomar um ponto nela e um ponto fora dela. O Axioma I_2 não afirma que existem dois pontos. Ele afirma que, toda vez que tivermos dois pontos, haverá uma reta (e uma só) que passa por eles. Tente provar que é impossível provar: (1°.) que existe ponto e (2°.) que existe reta. {item:1:20}

Esta é uma questão difícil para principiantes porque usa argumentos inéditos para alunos. Um modelo de geometria sem pontos e sem reta satisfaz os axiomas I_1 e I_2, por vacuidade: como não há elementos que satisfaçam as hipóteses, as teses não são contrariadas. Veja a lista de exercícios n. 1.

Item 1.21. Como os dois axiomas dados não garantem que pontos e retas existem, para garantir a sua existência, precisamos de um axioma que garanta a existência de ponto e de reta. {item:1:21}

Item 1.22. Tentativas para o enunciado do terceiro axioma: {item:1:22}
Enunciado 1: "Existe pelo menos um ponto";
Enunciado 2: "Existe pelo menos uma reta";
Enunciado 3: "Existem pelo menos dois pontos".

É bom que o enunciado a ser proposto garanta a existência de ponto e de reta. Como o leitor pode verificar, o enunciado 1 não garante a existência de reta. O leitor também pode verificar que qualquer um dos outros dois enunciados são bons. Adotaremos o enunciado 3 como o terceiro axioma.

{item:1:23} ***Item 1.23.*** Terceiro axioma, I_3:

Axioma 3 (I_3). *Existem pelo menos dois pontos.*

{item:1:24} ***Item 1.24.*** Teorema:

{teo:existsline}

Teorema 1.1. *Existe reta.*

Demonstração. O Axioma I_3 garante que existem dois pontos A e B. Agora, o Axioma I_2 pode ser aplicado, e existe uma reta que contém A e B. □

{item:1:25} ***Item 1.25.*** Voltamos às perguntas em 11, 17 e 18, agora acrescentando o axioma I_3.

Quantos pontos uma reta possui? Resposta: pelo menos 1. Prova?
Quantos pontos existem? Resposta: pelo menos 3. Prova?
Quantas retas existem? Resposta: pelo menos 3. Prova?

{item:1:26} ***Item 1.26.*** Admitindo apenas os três axiomas, como se prova que é impossível provar que cada reta possui mais de um ponto?

Basta exibir um modelo que satisfaz os três axiomas de incidência, mas em que uma de suas retas possui apenas 1 ponto. O modelo construído no item 14 satisfaz também o Axioma I_3 e tem uma reta com 1 ponto. Este modelo é um contra-exemplo para a afirmação de que existe mais de um ponto em qualquer reta.

{item:1:27} ***Item 1.27.*** Quantos pontos existem? Mais precisamente: admitidos apenas os três axiomas I_1, I_2 e I_3 quantos pontos podemos garantir que existem?

eo:exists3points}

Teorema 1.2. *Existem pelo menos 3 pontos.*

Demonstração.

i Sejam A e B dois pontos distintos (Axioma I_3).

ii Seja r a reta determinada por A e B (Axioma I_2).

iii Seja C um ponto fora de r (Axioma I_1).

iv O ponto C é distinto de A e de B por estar fora da reta r e A e B estarem na reta r.

A figura abaixo, que utiliza representações intuitivas de ponto e reta, ilustra os passos da demonstração.

{Fig:01:27}

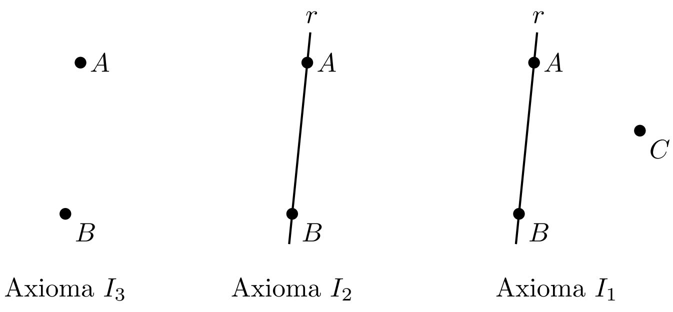


Figura 1.1: Existem pelo menos 3 pontos.

□

Item 1.28. Tentativa frustrada de demonstração de que existem pelo menos 4 pontos. {item:1:28}

Um aluno apresentou a seguinte "demonstração"de que existem pelo menos 4 pontos. Os três passos iniciais são os mesmos da demonstração do Teorema 1.2. Agora, pelo Axioma I_2, existe uma reta t que passa por B e C. Pelo Axioma I_1, aplicado à reta t, existe um ponto D fora de r. Portanto existem 4 pontos: A, B, C, D (erro!). Onde está o erro? Resposta: O Axioma I_1 só garante a existência de 1 ponto fora de t. Copio A já está fora de t, o axioma não garante a existência de um novo ponto D fora de t.

{Fig:01:28}

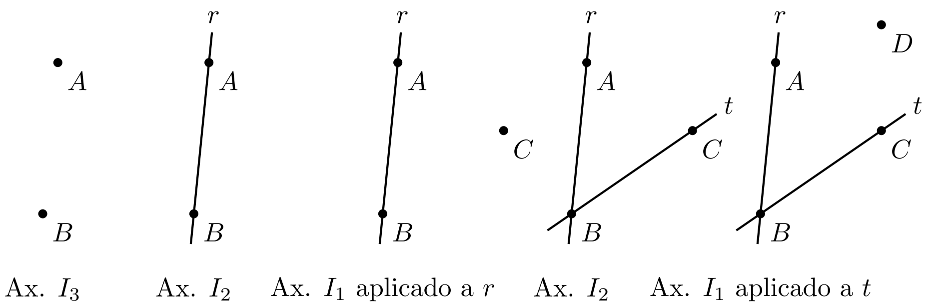


Figura 1.2: Não existe necessáriamente 4 pontos.

Item 1.29. Como se prova que é impossível provar que existem mais de três pontos? {item:1:29}

Se fosse possível provar que existem mais de três pontos, então qualquer modelo que satisfaz os três axiomas teria que ter mais de 3 pontos. Portando, basta exibir um modelo que satisfaz os três axiomas de incidência, mas com apenas 3 pontos. Um modelo assim foi exibido no item 13.

{item:1:30} ***Item 1.30.*** Quantas retas existem, admitindo apenas os três axiomas de incidência?

teo:exists3lines} **Teorema 1.3.** *Existem pelo menos três retas.*

Demonstração. Os três primeiros passos são como na demonstração do Teorema B. Sejam agora s a reta determinada por A e C e t a reta determinada por B e C. Precisamos mostrar que as retas r, s e t são distintas. (a) r é diferente de s porque C está em s, mas não está em r. (b) r é diferente de t porque C está em t, mas não está em r. (c) s é diferente de t porque B está em t, mas não está em s. Aqui, o que precisa ser justificado é porque B não está em s (isto não é fácil; veja o argumento a seguir). De fato, se B estivesse em s, teríamos dois pontos comuns a r e s, a saber, os pontos A e B. Pelo Axioma I$_2$, as retas r e s seriam coincidentes. Isto acarretaria que o ponto C também estaria na reta r, o que contraria o fato de que C está fora de r. Logo, B não pode estar em s. Isto conclui a demonstração de que existem três retas.

□

{Fig:01:30}

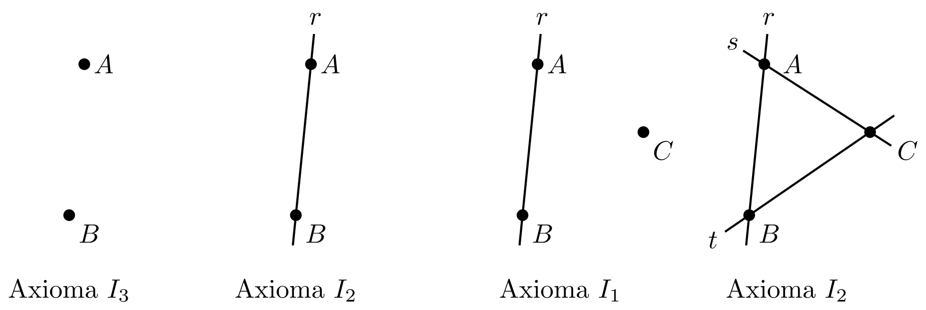


Figura 1.3: Existem pelo menos três retas.

{item:1:31} ***Item 1.31.*** Como se prova que é impossível provar que existem mais de três retas?

Basta exibir um modelo que satisfaz os três axiomas de incidência, mas com apenas 3 retas. Um modelo assim foi construído no item 13.

1.2 Resumo

Objetos primitivos: ponto e reta.
Relação primitiva: [ponto] pertence a [reta] ("relação de incidência").

Axioma I_1. *Qualquer que seja a reta, existe pelo menos um ponto que pertence a ela e existe pelo menos um ponto que não pertence a ela.*
Axioma I_2. *Dois pontos determinam uma reta. Em outras palavras, dados dois pontos distintos quaisquer, existe uma e uma só reta que os contém.*
Axioma I_3. *Existem pelo menos dois pontos.*

Geometria de incidência é constituída dos conceitos não-definidos ponto e reta, da relação não-definida pertence a, dos axiomas de incidência I_1, I_2, I_3 e de todos os teoremas que se podem demonstrar a partir destes axiomas.

Modelo para uma geometria. Para construir um modelo para uma geometria de incidência, dá-se uma interpretação concreta para os termos e relação não-definidos e mostra-se que os três axiomas são válidos.

Propriedade fundamental dos modelos. Qualquer teorema que se pode provar com os axiomas de incidência é válido em qualquer modelo que satisfaça os axiomas de incidência.

Teorema 1.1. Existe reta.
Teorema 1.2. Existem pelo menos 3 pontos.
Teorema 1.3. Existem pelo menos três retas.

1.3 Lista de Exercícios n. 1

1.1. *Os três axiomas garantem a existência de quantos pontos?*

1.2. *Os três axiomas garantem a existência de quantas retas?*

1.3. *Os três axiomas impedem a existência de mais de três pontos?*

1.4. *Os três axiomas impedem a existência de mais de três retas?*

1.5. *Qual é o menor modelo que se pode construir satisfazendo os três axiomas?*

1.6. *Qual é a menor quantidade de retas que um modelo pode ter?*

1.7. *Pode um modelo que satisfaz os três axiomas, com exatamente três pontos, possuir três retas? E quatro? E cinco? E seis?*

1.8. *Existe modelo com quatro pontos?*

1.9. *Existem retas sem pontos? E com um só ponto? E com dois? E com três?*

1.10. *Todas as retas têm a mesma quantidade de pontos?*

1.11. *Como se prova que é impossível provar que existem mais de três pontos?*

1.12. *Admitindo* ***apenas os axiomas I_1 e I_2****, como se prova que é impossível provar que existe pelo menos um ponto?*

1.13. *Admitindo* ***apenas os axiomas I_1 e I_2****, como se prova que é impossível provar que existe pelo menos uma reta?*

1.14. *Admitidos os axiomas I_1 e I_2 e se for adotado o axioma I_3, enunciado abaixo, em lugar do axioma I_3, os teoremas que se podem provar com I_1, I_2 e I_3 são os mesmos que se podem provar com I_1, I_2 e $I_{3'}$*

Axioma $I_{3'}$*. Existe pelo menos uma reta.*

1.15. *Como se prova que não se pode provar I_1, a partir de I_2 e I_3?*

1.16. *Como se prova que não se pode provar I_2, a partir de I_1 e I_3?*

1.17. *Como se prova que não se pode provar I_3, a partir de I_1 e I_2?*

1.4 Soluções da Lista de Exercícios n. 1

1.1. *Os três axiomas garantem a existência de quantos pontos?*

Resposta:
Veja os itens 27, 28 e 29 do Roteiro 1.

1.2. *Os três axiomas garantem a existência de quantas retas?*

Resposta:
Veja os itens 30 e 31 do Roteiro 1.

1.3. *Os três axiomas impedem a existência de mais de três pontos?*

Resposta:
Não. Para provar isto, basta construir um modelo com 4 pontos.

Pontos: A, B, C, D.

Retas: $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$ e $\{C, D\}$.

Verifique você que os Axiomas I_1 e I_2 estão satisfeitos, construindo as tabelas semelhantes às do item 13, do Roteiro 1. É claro que o Axioma I_3 também está satisfeito.

1.4. *Os três axiomas impedem a existência de mais de três retas?*

Resposta:
Não. Para isto basta exibir um modelo com mais de três retas. O modelo com 4 letras e 6 retas do Exercício 3 resolve a questão.

1.5. *Qual é o menor modelo que se pode construir satisfazendo os três axiomas?*

Resposta:
Vamos mostrar que é o modelo com 3 pontos e 3 retas.

(a) O Axioma I_3 garante que existem 2 pontos, digamos, A e B.

(b) O Axioma I_2 obriga a existência de uma reta contendo A e B: $\{A, B\}$.

(c) O Axioma I_1 obriga a existência de um ponto fora de $\{A, B\}$, digamos, C.

(d) O Axioma I_2 obriga a existência das retas $\{A, C\}$ e $\{B, C\}$.

Fomos obrigados a criar 3 pontos e 3 retas. Como vimos, este é um modelo que satisfaz os 3 axiomas.

1.6. *Qual é a menor quantidade de retas que um modelo pode ter?*

Resposta:
Pelo que vimos no Exercício 5, são 3 retas.

1.7. *Pode um modelo que satisfaz os três axiomas, com exatamente três pontos, possuir três retas? E quatro? E cinco? E seis?*

Resposta:
Sim. O modelo do Exercício 5 tem 3 retas. Basta acrescentar uma, duas e três dentre as retas $\{A\}$, $\{B\}$ e $\{C\}$ para se obter modelos com 4, 5 e 6 retas.

1.8. *Existe modelo com quatro pontos?*

Resposta:
Sim. 0 modelo do Exercício 3 é um deles. Pergunta: Você acha que, sendo os pontos A, B, C e D e as retas $\{A, B, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, D\}$ e $\{C, D\}$, tem-se um modelo que satisfaz os 3 axiomas? A resposta é sim. Prove, construindo as tabelas semelhantes às do item 13, do Roteiro 1.

1.9. *Existem retas sem pontos? E com um só ponto? E com dois? E com três?*

Resposta:
Não existe reta sem pontos, pois o Axioma I_1 garante que cada reta possua pelo menos 1 ponto. Os modelos criados nos exercícios anteriores exibem retas com 1, com 2 e com 3 pontos.

1.10. *Todas as retas têm a mesma quantidade de pontos?*

Resposta:
Em um mesmo modelo podem-se ter retas com diferentes quantidades de pontos, como mostram alguns dos modelos citados em exercícios anteriores.

1.11. *Como se prova que é impossível provar que existem mais de três pontos?*

Resposta:
Exibindo um modelo com exatamente 3 pontos, como o construído no item 13, do Roteiro 1. O argumento é o seguinte: se fosse possível provar que existem mais de 3 pontos, não poderia existir um modelo com exatamente 3 pontos.

1.12. *Admitindo **apenas os axiomas I_1 e I_2**, como se prova que é impossível provar que existe pelo menos um ponto?*

Resposta:
Construindo um modelo sem pontos. Aqui está. Pontos: nenhum. Retas: nenhuma. Este modelo satisfaz os axiomas por *vacuidade*. Isto significa que, não estando as hipóteses presentes, as teses não podem ser contrariadas.

1.13. *Admitindo **apenas os axiomas I_1 e I_2**, como se prova que é impossível provar que existe pelo menos uma reta?*

Resposta:
Exibindo um modelo que satisfaz I_1 e I_2, mas que não possua reta. mesmo modelo do exercício 12, do Roteiro 1. resolve a questão. Aqui está outro modelo. Pontos: a letra A. Retas: nenhuma. Este modelo satisfaz os axiomas por vacuidade. Isto significa que, não estando as hipóteses presentes, as teses não podem ser contrariadas.

1.14. *Admitidos os axiomas I_1 e I_2 e se for adotado o axioma I_3, enunciado abaixo, em lugar do axioma I_3, os teoremas que se podem provar com I_1, I_2 e I_3 são os mesmos que se podem provar com I_1, I_2 e $I_{3'}$*

***Axioma** $\boldsymbol{I}_{3'}$. Existe pelo menos uma reta.*

Resposta:
Sim. I_3 e $\mathrm{I}_{3'}$ são equivalentes e, por esta razão, como veremos mais na frente, os teoremas que se podem provar com um deles são os mesmos que se podem provar com o outro.

Definição. Dois axiomas são **equivalentes** quando, admitido um deles como verdadeiro, o outro pode ser provado.

Vamos mostrar que os dois axiomas são equivalentes.

(a) Supondo válido o axioma I_3 vamos provar $\mathrm{I}_{3'}$. Sejam A e B dois pontos (hipótese do I_3). Por I_2, existe uma reta que contém A e B. Isto prova $\mathrm{I}_{3'}$.

(b) Supondo válido o axioma $\mathrm{I}_{3'}$ vamos provar I_3. Seja r uma reta (hipótese do $\mathrm{I}_{3'}$). Por I_1, existe um ponto A em r e um ponto B fora de r. Logo, existem dois pontos, provando I_3.

Agora, suponhamos que para provar certo teorema T foi utilizado em algum passo da demonstração o I_3. Ora, se for adotado o $\mathrm{I}_{3'}$, o I_3 pode ser provado antes e assim ele pode ser aplicado naquele passo da demonstração do teorema T. Assim sendo, um teorema que se pode provar com o I_3 pode também ser provado com o $\mathrm{I}_{3'}$.

1.15. *Como se prova que não se pode provar I_1, a partir de I_2 e I_3?*

Resposta:
Exibindo um modelo que satisfaz I_2 e I_3, mas não satisfaz I_1. Aqui está o modelo. Pontos: A e B. Retas: $\{A, B\}$ (uma só). Este modelo não satisfaz I_1, pois não existe ponto fora da reta $\{A, B\}$. É claro que satisfaz I_2 e I_3.

1.16. *Como se prova que não se pode provar I_2, a partir de I_1 e I_3?*

Resposta:
Exibindo um modelo que satisfaz I_1 e I_3, mas não satisfaz I_2. Aqui está o modelo. Pontos: A e B. Retas: $\{A\}$ (uma só). É claro que satisfaz I_1 e I_3. Este modelo não satisfaz I_3 pois não existe reta que contém os dois pontos A, B.

1.17. *Como se prova que não se pode provar I_3, a partir de I_1 e I_2?*

Resposta:

Basta construir um modelo que satisfaz I_1 e I_2, mas não satisfaz I_3 (ou seja, um modelo com menos de 2 pontos). É o que faremos a seguir.

Pontos do modelo: A (só um ponto).

Retas: nenhuma.

Este é um modelo com um só ponto e nenhuma reta. Por que satisfaz I_1 (*Se r é uma reta, então existem um ponto nela e um ponto fora dela*)? Porque não existe nenhuma reta e, assim, a sua tese não é contrariada! O axioma I_1 não estaria satisfeito, se a sua hipótese estivesse presente (tivéssemos uma reta) e a tese fosse contrariada (não existisse ponto nela ou fora dela). Quando isto acontece, dizemos que o axioma I_1 está satisfeito por *vacuidade*. Da mesma maneira, o axioma I_2 (*se A e B são dois pontos, então existe uma única reta que os contém*) também está satisfeito por vacuidade, pois a sua tese não é contrariada, já que não existem dois pontos para exigir a existência de uma reta que os contenha. Isto conclui a demonstração.

Pergunta ao leitor: Um modelo sem ponto e sem reta também serviria?

Capítulo 2

Paralelismo

{roteiro:2}

2.1 Roteiro 2. Paralelismo

Conteúdo: Retas paralelas. Retas que se interceptam. Retas que se interceptam existem? Retas paralelas existem? Axiomas de existência e unicidade de paralela. Lema da transversal. Novo enunciado para o Axioma I_1.

Item 2.1. Por que retas paralelas são interessantes? {item:2:1}

Item 2.2. Como se definem retas paralelas? {item:2:2} {def.parallel}

Definição 2.1. *Duas retas são* ***paralelas*** *se não têm ponto em comum. Duas retas se interceptam se não são paralelas, isto é, se têm ponto em comum.*

Item 2.3. Retas que se interceptam existem (admitidos apenas os três axiomas de incidência)? Sim. Para provar isto, vamos construir duas retas que se interceptam utilizando os axiomas dados até agora. {item:2:3}

{Fig:02:03}

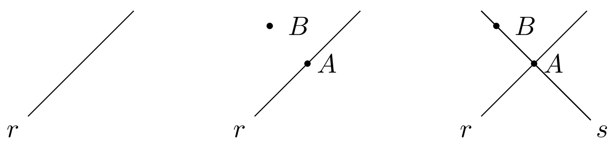


Figura 2.1: Existem retas que interceptam.

Começamos com uma reta r, cuja existência está garantida pelo Teorema 1.1 do Roteiro 1:

i Seja A um ponto em r e seja B ponto fora de r (Axioma I_1).

ii Seja s a reta determinada por A e B (Axioma I_2).

iii As retas r e s são retas que se interceptam, pois têm o ponto A em comum.

Qualquer que seja o ponto A, existem pelo menos duas retas que passam por ele. Você é capaz de provar a afirmação? É possível provar que existem três retas passando por A?

{item:2:4} ***Item 2.4.*** Admitidos apenas os três axiomas de incidência, é possível provar que retas paralelas existem? Tente construir duas retas paralelas.

Façamos algumas especulações.

Afirmação 1. *Retas paralelas existem. É impossível prová-la.*

Basta dar um contra-exemplo: modelo em que os pontos são as letras A, B e C; e as retas são os conjuntos $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ e $\{B, C\}$. Neste modelo não existem retas paralelas. Se fosse possível provar a afirmação 1, em qualquer modelo teria que haver retas paralelas.

Afirmação 2. *Retas paralelas não existem. Esta é a negação da afirmação 1 e também é impossível prová-la.*

Contra-exemplo: modelo em que os pontos são as letras A, B e C; e as retas são os conjuntos $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ e $\{B, C\}$, $\{A\}$. As retas $\{B, C\}$ e $\{A\}$ são paralelas. Se fosse possível provar a afirmação 2, em nenhum modelo existiriam retas paralelas.
Conclusão. Nem é possível provar que existem, nem é possível provar que não existem, estando presentes apenas os três axiomas de incidência. Dizemos que "Retas paralelos existem"é uma afirmação indecidível, isto é, não é possível provar que ela é verdadeira, nem que ela é falsa. Outra coisa: **uma definição por si só não garante a existência do objeto definido**.

{item:2:5} ***Item 2.5.*** Já que é impossível provar que existem retas paralelas, se quisermos que elas existam teremos que declarar isto através de um axioma. Mas a experiência aconselha-nos a tomar um edeclarar que retas paralelas existem. É melhor tratar da possibilidade de existência e de unicidade de reta paralela a uma reta dada por um ponto fora da reta. Enunciaremos a existência e a unicidade em axiomas separados.

{ax:P1}

Axioma 4 (P_1). *Qualquer que seja a reta r e qualquer que seja o ponto P fora de r, existe pelo menos uma paralela a r por P. (Existência.)*

{ax:P2}

Axioma 5 (P_2). *Qualquer que seja a reta r e qualquer que seja o ponto P fora de r, existe no máximo uma paralela a r por P. (Unicidade.)*

{item:2:6} ***Item 2.6.*** No Roteiro 1, quando havia apenas os três axiomas de incidência, vimos que não é possível provar que qualquer reta possui mais de um ponto (veja os itens 11 e 26 do Roteiro 1. Agora, acrescentados os dois axiomas de paralelismo, podemos provar que cada reta possui pelo menos dois pontos? Resposta: sim.

{teo:1line2points

Teorema 2.1. *Qualquer reta possui pelo menos dois pontos.*

Hipótese: r é uma reta qualquer
Tese: existem dois pontos em r

Demonstração.

(a) Seja r uma reta qualquer (hipótese).

(b) Seja P um ponto em r e seja A um ponto fora de r (axioma I_1).

(c) Seja s a reta determinada por P e A (axioma $\mathrm{I}_1$12).

(d) Seja B um ponto fora de s (axioma I_1 aplicado à reta s).

(e) Se B está em r, a afirmação fica provada.

(f) Se B não. está em r, seja t uma reta paralela a s por B (axioma P_1).

Agora vem a parte delicada da demonstração: afirmo que a reta t corta a reta r num ponto que chamarei de Q concluindo a demonstração de que t tem pelo menos dois pontos, P e Q. Por que t corta a reta r? Prova por absurdo:

I: se t não cortasse r,

II: então r seria paralela a t e teríamos duas retas paralelas a t, passando pelo ponto P, a saber, as retas r e s; isto contraria P_2.

Logo, t tem que cortar r. Com isto fica provado que a reta r tem dois pontos distintos: P e Q. □

O símbolo □ indica o fim da demonstração.

{Fig:02:06}

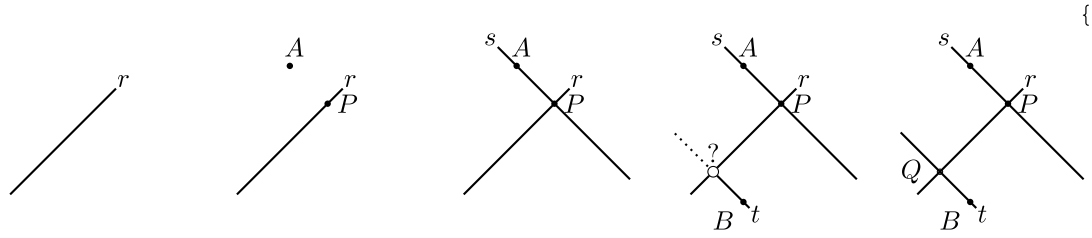


Figura 2.2: Uma reta possui pelo menos dois pontos.

Item 2.7. Observação. O ponto delicado da demonstração do item anterior requer perceber e demonstrar um fato que, por si mesmo, tem um interesse especial. Quando isto acontece ao longo de uma demonstração, costuma-se isolar o fato e enunciá-lo na forma de "lema". Com um lema, isolamos um pcinto delicado de uma demonstração, a fim de tornar mais compreensível um argumento que, de outra maneira, ficaria mais complexo e, assim, mais difícil de ser acompanhado pelo leitor. O seu enunciado está no item seguinte. {item:2:7}

{item:2:8} ***Item 2.8.***

emma:transversal}

Lema 2.2 (Lema da transversal)**.** *Sejam r e s retas paralelas. Se uma reta t corta r, então t corta também s. (A reta t é chamada de transversal.)*

Demonstração. Faça você mesmo (veja o último parágrafo da demonstração do item 6). □

{Fig:02:08}

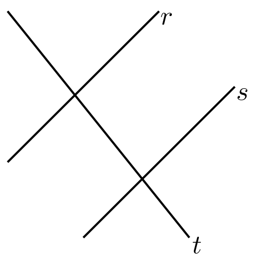


Figura 2.3: Lema da Transversal.

{item:2:9} ***Item 2.9.*** É impossível provar que qualquer reta possui três pontos. Basta exibir um modelo em que cada reta possui dois pontos, satisfazendo os cinco axiomas. Aqui está: os pontos são A, B, C e D e as retas, $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{13, D\}$, $\{C, D\}$. A figura abaixo é uma representação esquemática deste modelo. Cada segmento entre duas letras indica a reta constituída pelas duas letras. Embora os segmentos que representam as retas $\{A, C\}$ e $\{B, D\}$ parecem se interceptar, essas retas são paralelas por que não têm ponto em comum.

{Fig:02:09}

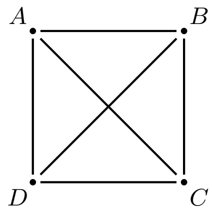


Figura 2.4: Modelo com 4 pontos e 6 retas.

Aproveito o ensejo para tocar numa questão metodológica. Os livros textos matemáticos costumam organizar a matéria numa hierarquia tal que todos os teoremas necessários para a demonstração de um novo teorema aparecem antes deste. Se fosse seguir esta orientação, o Lema que aparece na demonstração acima deveria vir antes dela. Fiz desta maneira para mostrar que é possível e, às vezes aconselhado do ponto de vista pedagógico, abordar uma questão antes que todos os pré-requisitos estejam prontos. Além disto, em consonância com o objetivo geral da disciplina, procuro estar dando uma idéia de que a construção não se dá de maneira linear, mas num processo de idas e vindas.

Item 2.10. Antes (admitidos I_1, I_2 e I_3), tínhamos: existem pelo menos 3 pontos e 3 retas. Agora (admitidos também P_1 e P_2), temos: existem pelos menos 4 pontos e 6 retas. Certo? Sim. {item:2:10}

{teo:4points6line

Teorema 2.3. *Existem pelo menos 4 pontos e 6 retas*

Demonstração. Comecemos com três pontos abstratos A, B, C, garantidos pelo Teorema 1.2 do Roteiro 1.

(a) Consideremos as retas r e s, determinadas por A e B, e A e C, respectivamente.

(b) Seja t uma paralela a r por C.

(c) Seja u uma paralela a s por B. Faça uma figura.

(d) Afirmo que u intercepta t em D (por que? O lema da transversal se aplica aqui?).

(e) Os quatro pontos são distintos (por que?).

(f) Também, as seis retas determinadas pelos quatro pontos tomados dois a dois são distintas (por que?)

□

Item 2.11. Duas retas distintas podem ter dois pontos em comum? Não. Por que? {item:2:11}

{item:2:12} ***Item 2.12.*** Cada reta possui o mesmo número de pontos. Certo? Sim.

eo:line.k.points}

Teorema 2.4. *Se uma reta r possui k pontos, então qualquer reta s também possui k pontos.*

Demonstração. Com relação às posições relativas de r e s, temos dois casos a considerar: s intercepta r, e s é paralela a r.
1^o caso (r intercepta s).

(a) Sejam A_1, A_2, ..., A_k os pontos de r, sendo que A, pertence também a s.

(b) Seja B_2 outro ponto de s (Teorema 2.1).

(c) Seja t_2 a reta determinada por A_2 e B_2.

(d) Sejam agora t_3, ..., t_k retas paralelas a t_2 passando pelos pontos A_3, ..., A_k, respectivamente (axioma P$_1$). (Por que essas retas são paralelas entre si? O axioma P$_2$ serve para provar isto?)

(e) Essas retas cortam s em pontos B_3,..., B_k, respectivamente (por que cortam? O lema da transversal se aplica?).

{Fig:02:03}

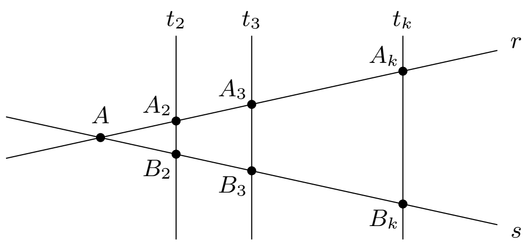


Figura 2.5: Todas as retas possuem o mesmo número de pontos.

Um ponto delicado é provar que os pontos B; são distintos (prove por absurdo). Em suma, até agora exibimos k pontos distintos em s. Isto prova o que queremos? Ainda não. Resta provar que, além desses k pontos, não existem outros pontos em s. Como? Segue uma demonstração por absurdo. Suponhamos que existe um outro ponto C em s, distinto dos B.

(a) Seja t uma reta paralela a t_2 passando por C (axioma P$_1$).

(b) Então t corta r (por que?), num ponto D.

(c) O ponto D é distinto dos pontos A_1 (por que?).

(d) Isto contraria o fato de que r põssui apenas os pontos A. Logo, s não pode possuir um ponto C distinto dos B_1, concluindo a demonstração deste caso.

□

Demonstração. 2^o caso (r é paralela a s).

(a) Seja B_1 um ponto de s (axioma I$_1$).

(b) Seja t_1 a reta determinada por A_1 e B_1.

(c) Seja agora t_2 a reta que passa por A_2.

(d) Agora, a demonstração continua como no 1^o caso.

□

Item 2.13. Construindo um modelo em que cada reta possui exatamente 3 pontos. {item:2:13}

Pontos para começar: as letras A, B e C. Reta ri = $\{A, B, C\}$
Ponto fora de $r1$: a letra D.
Precisamos de reta paralela a $r1$, pelo ponto D.
Isto obriga que se tenha uma reta $r2$ = $\{D, E, F\}$.
Precisamos de reta que contém A e D Isto obriga criar mais uma reta $r3$= $\{A, D, G\}$.
Precisamos de reta paralela à $r1$ e à $r2$, passando por G. Isto obriga $r4$ = $\{G, H, I\}$.
Até agora temos 9 pontos: A, B, C, D, E, F, G, H, I. O esquema abaixo sugere 12 retas: $\{A, B, C\}$, $\{D, E, F\}$, $\{G, H, I\}$, $\{A, D, G\}$, $\{B, E, H\}$, $\{C, F, I\}$, $\{A, E, I\}$, $\{G, E, C\}$, $\{B, F, G\}$, $\{C, D, H\}$, $\{D, B, I\}$, $\{A, H, F\}$. O leitor pode se reportar à figura abaixo, para se convencer de que os 5 axiomas estão satisfeitos.
Neste modelo, observe o-seguinte:

1. a quantidade de pontos de cada reta é $k = 3$;

2. a quantidade de retas que passam por um dado ponto é $m = 4$;

3. a quantidade de pontos é $n = 9$;

4. a quantidade de retas é $r = 12$. Será coincidência que $n = k^2$ e $r = mk$?

{Fig:02:13}

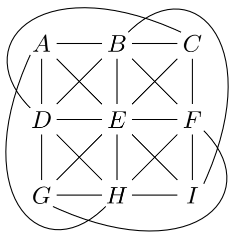


Figura 2.6: Modelo em que cada reta possui exatamente 3 pontos.

{item:2:14} ***Item 2.14.***

eo:point.m.lines}

Teorema 2.5. *Se por um ponto dado A passam m retas, então por outro ponto B qualquer também passam m retas.*

Demonstração. Sejam r_1, r_2, ..., r_m as retas que passam por A. Suponhamos que r_1 é a reta que também passa por B. Sejam s_2, ..., s_m as retas paralelas a r_2, ..., r_m, respectivamente, por B.

{Fig:02:14}

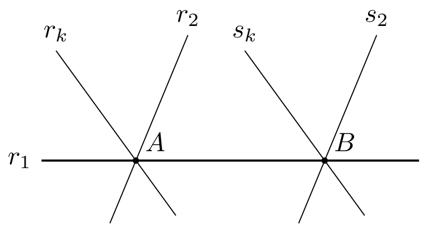


Figura 2.7: Em cada ponto passa o mesmo número de retas.

Afirmamos que as retas s_i são distintas duas a duas. De fato, se duas delas coincidissem, digamos, $s_i = s_j$, então pelo ponto A teríamos duas retas, r_i e r_j, paralelas a uma reta s_i, contrariando o Axioma P$_2$. Logo, as retas s_i são distintas duas a duas. Portanto, pelo ponto B passam pelo menos m retas distintas (veja a figura abaixo). Mas a demonstração ainda não terminou. Pode passar por B mais uma reta, digamos s, distintas das anteriores? Não. Porque se fosse assim, tomaríamos por A uma reta t paralela a s, que não poderia coincidir com nenhuma das anteriores t_i (se coincidisse, P$_2$ seria contrariado), e desta maneira teríamos mais uma reta passando por A, contrariando a hipótese de que por A passam m retas. $\square$

{item:2:15} ***Item 2.15.*** Novo enunciado para o Axioma I_1.

Uma característica que um axioma deve ter é a de que ele não pode ser provado, a partir dos demais axiomas. Em outras palavras, cada axioma é independente dos demais. Nesta unidade, foram introduzidos mais dois axiomas, os axiomas de paralelismo. Vamos reexaminar o Axioma I_1. Faço a seguinte afirmação: Com os axiomas I_2, I_3, P_1 e P_2 e com a parte (b) da tese do Axioma I_1 é possível provar que cada reta possui pelo menos um ponto (que é a parte (a) da tese do Axioma I_1). A figura abaixo ilustra os cinco passos da demonstração.

Em (1), tomamos uma reta qualquer r (hipótese).

Em (2), aplicamos a parte (b) da tese do Axioma I_1 para tomar o ponto A fora de r.

Em (3), aplicamos o Axioma P_1 para traçar a reta s paralela a r, pelo ponto A.

Em (4), aplicamos a parte (b) de I_1 para tomar o ponto B fora de s e já aplicamos o Axioma I_2 para traçar a reta t que contém os pontos A e B.

Em (5), aplicamos o Lema da transversal para garantir que a transversal t corta a reta r no ponto C, concluindo a demonstração.

Com isto, o enunciado do Axioma I_1 passa a ser mais simples:

{Fig:02:15}

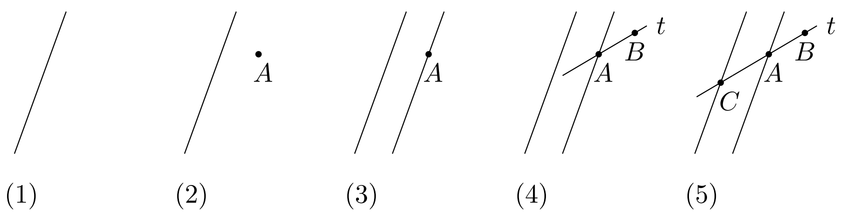


Figura 2.8: Axioma I_1, versão nova.

Axioma 6 (Axioma I_1, novo)**.** *Qualquer que seja a reta, existe pelo menos um ponto fora dela.*

Conclusão: Com a inclusão dos axiomas de paralelismo, a parte (a) da tese do Axioma I_1 (que afirma a existência de ponto na reta) pode ser retirada do seu enunciado, já que, agora, esta parte pode ser provada. Na lista de exercícios número 2, convidamos o leitor para mostrar que cada um dos cinco axiomas (sendo agora o axioma I_1 no novo enunciado) é independente dos demais. Para mostrar que um axioma A é independente dos demais, constrói-se um modelo que satisfaz todos os axiomas, exceto o axioma A.) argumento por trás desta estratégia é o seguinte: se o axioma A pudesse ser provado a partir dos demais axiomas, o axioma A seria um teorema e, assim, seria válido em qualquer modelo que satisfizesse esses axiomas (de acordo com a propriedade fundamental dos modelos).

{item:2:16} ***Item 2.16.*** Comentários.

De acordo com a nossa intuição, a existência e a unicidade de reta paralela a uma reta dada por um ponto dado nada tem a ver com a quantidade de pontos de uma reta. Não é assim, como vimos neste roteiro. Aqui está o que ganhamos com o acréscimo dos axiomas de paralelismo à lista de axiomas:

(a) Cada reta possui pelos menos dois pontos. Sem os axiomas de paralelismo é impossível provar isto Roteiro 1, (item 16).

(b) Existem pelos menos 4 pontos e 6 retas. Compare com os itens itens 29 e 31 do Roteiro 1.

(c) Num mesmo modelo, todas as retas possuem o mesmo número de pontos. Compare com o modelo do item 14 do Roteiro 1. no qual há retas com um ponto e com dois pontos.

(d) Num mesmo modelo, por qualquer ponto passa o mesmo número de retas. Isto não acontece no modelo do item 14 do Roteiro 1. Pelo ponto A passam três retas: $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ e $\{A\}$. Pelo ponto B, passam duas retas: $\{A, B\}$ e $\{B, C\}$.

(e) Agora, o mais surpreendente: a quantidade de pontos de qualquer modelo finito é um número quadrado perfeito: $4, 9, 16, ...$. Não é possível construir um modelo com 5 e 6 pontos, por exemplo. Curioso? Veja a lista de exercícios n. 2.

2.2 Resumo

Objetos primitivos: ponto e reta.
Relação primitiva: [ponto] pertence a [reta] ("relação de incidência").
Objetos definidos: retas que se interceptam, retas paralelas.

Axiomas

Axioma I$_1$ *Qualquer que seja a reta, existe pelo menos um ponto fora dela.*
[Este é o novo enunciado do axioma II que passará a ser usado doravante.]
Axioma I$_2$ *Dois pontos determinam uma reta. Em outras palavras, dados dois pontos distintos quaisquer, existe uma e uma só reta que os contém.*
Axioma I$_3$ *Existem pelo menos dois pontos.*
Axioma P$_1$ *Qualquer que seja a reta r e qualquer que seja o ponto P fora de r, existe pelo menos uma paralela a r por P. (Existência)*
Axioma P$_2$ *Qualquer que seja a reta r e qualquer que seja o ponto P fora de r, existe no máximo uma paralela a r por P. (Unicidade)*

Teoremas

Propriedade de Paralelismo. Se r é paralela a s, e s é paralela a t, então r é paralela a t.
Teorema 2.1. Qualquer reta possui pelo menos dois pontos.
Lema 2.2: Lema da Transversal. Sejam r e s retas paralelas. Se uma reta t corta r, então t corta também s.
Teorema 2.3. Existem pelo menos 4 pontos e 6 retas
Teorema 2.4. Se uma reta r possui k pontos, então qualquer reta s também possui k pontos.
Teorema 2.5. Se por um ponto dado A passam m retas, então por outro ponto B qualquer também passam m retas.

2.3 Lista de Exercícios n. 2

2.1. *Qualquer que seja o ponto A, existem pelo menos três retas que passam por ele. Você é capaz de provar esta afirmação? É possível provar que existem quatro retas passando por A?*

2.2. *Um axioma é independente dos demais se não pode ser provado a partir deles. Na verdade, o que se pretende é confirmar que eles são axiomas de fato. Prove que:*

(a) *O axioma I_1 é independente de I_2, I_3, P_1 e P_2.*

(b) *O axioma I_2 é independente de I_1, I_3, P_1 e P_2.*

(c) *O axioma I_3 é independente de I_1, I_2, P_1 e P_2. Os pontos são as letras A, B e C. Retas: {A, B}, {A,B}, {B, C}. É claro que os 3 primeiro axiomas estão satisfeito. P2 está satisfeito porque não existem paralelas (0 é menor que 1, que é o número máximo permitido de paralelas a uma reta por um ponto fora dela).*

(d) *O axioma P_1 é independente de I_1, I_2, I_2 e P_2.*

(e) *O axioma P_1 é independente de I_1, I_2, I_2 e P_2.*

2.3. *Dado um ponto P, considere todas as retas que passam por P. Então qualquer ponto está em pelo menos uma dessas retas. Prove. Você precisa de P_1 e P_2 para provar esta afirmação?*

2.4. ***Lema da transversal.*** *Sejam r e s retas paralelas. Se uma reta t corta r, então t corta também s. Prove. Observe que você não usa P_1, mas usa P_2 na demonstração.*

2.5. *Como você prova que o axioma P_2 é indispensável para provar o Lema da transversal?*

2.6. ***Propriedade transitiva de paralelismo.*** *Se r é paralela a s, e s é paralela a t, então r é paralela a t. Prove.*

2.7. *Prove que o axioma P_2 é indispensável para provar a Propriedade transitiva de paralelismo, mesmo com a presença do axioma P_1.*

2.8. *Use o Lema da transversal para provar o Teorema 2.1.*

2.9. *Prove que o axioma P_2 é indispensável para provar o Teorema 2.1.*

2.10. *Prove o Teorema 2.3. É impossível provar que existem mais de 4 pontos e mais de 6 retas?*

2.11. *Por que você é capaz de construir modelos (satisfazendo os 5 axiomas) com 4, 9 e 16 pontos, mas não é capaz de construir modelos com 5, 6, 14 ou 15 pontos?*

Esta é uma questão difícil. Os matemáticos gostam de desafios como este. Mas eles vivem disto; podem passar horas, dias, meses e até anos tentando resolver uma questão. (Leia, por exemplo, o livro: O Último Teorema de Fermat. Simon Singh. Editora Record, Rio de Janeiro, 1999, 324p.) Você não deve gastar mais que alguns minutos nesta questão. Se não conseguir, passe para frente.

2.12. *Prove o Teorema 2.4.*

Se uma reta r possui k pontos, então qualquer reta s também possui k pontos.

2.13. *Prove o Teorema 2.5. Sejam k é o número de pontos de uma reta; m o número de retas que passam por um dado ponto; e n o número total de pontos. Você não acha surpreendente que os cinco axiomas impliquem as fórmulas dadas nas proposições seguintes? Antes de tentar prová-las, teste-as nos modelos que você conhece.*

2.14. *Proposição.* $m = k + 1$.

2.15. *Proposição.* $n = m(k - 1) + 1$, *o que é o mesmo que* $n = k^2$. *(Com esta fórmula em mente, volte agora ao Exercício 11.)*

2.16. *Proposição. O número total de retas é* mk, *o que é o mesmo que* $n + k$.

2.4 Soluções da Lista de Exercícios n. 2

2.1. *Qualquer que seja o ponto A, existem pelo menos três retas que passam por ele. Você é capaz de provar esta afirmação? É possível provar que existem quatro retas passando por A?*

Resposta:

Demonstração. Seja A um ponto qualquer (hipótese).

i Seja B um ponto distinto de A (Axioma I_3).

ii Seja r a reta determinada por A e B (Axioma I_2).

iii Seja C um ponto fora de r.

iv O ponto B está fora da reta s.

v Seja t uma reta paralela a s por B (Axioma P_1).

vi Seja D um ponto de t distinto de B (Teorema 2.1).

vii Seja u a reta determinada por A e D.

viii Resta mostrar que as retas r, s e u, que passam por A, são distintas.

ix As retas r e s são distintas porque C está em s, mas não está em r.

x As retas r e u são distintas porque D está em u. mas não está em r.

xi As retas s e u são distintas porque D está em u, mas não está em s.

Faça uma figura. Agora, não é possível provar que passam mais de 3 retas por A, porque existe um modelo satisfazendo os cinco axiomas em que passam apenas 3 retas por cada ponto, a saber, o modelo com 4 pontos e 6 retas exibido no item 9, do Roteiro 2.

□

2.2. *Um axioma é independente dos demais se não pode ser provado a partir deles. Na verdade, o que se pretende é confirmar que eles são axiomas de fato. Prove que:*

(a) O axioma I_1 é independente de I_2, I_3, P_1 e P_2.

(b) O axioma I_2 é independente de I_1, I_3, P_1 e P_2.

(c) O axioma I_3 é independente de I_1, I_2, P_1 e P_2. Os pontos são as letras A, B e C. Retas: {A, B}, {A,B}, {B, C}. É claro que os 3 primeiro axiomas estão satisfeito. P2 está satisfeito porque não existem paralelas (0 é menor que 1, que é o número máximo permitido de paralelas a uma reta por um ponto fora dela).

(d) O axioma P_1 é independente de I_1, I_2, I_2 e P_2.

(e) O axioma P_1 é independente de I_1, I_2, I_2 e P_2.

Resposta:

(a) O axioma I_1 é independente de I_2, I_3, P_1 e P_2.

Basta exibir um modelo que satisfaz I_2, I_3, P_1 e P_2, mas não satisfaz I_1. [Por que? Porque se I, fosse um teorema provado a partir dos quatro axiomas, então h seria válido em qualquer modelo que satisfizesse aqueles axiomas.]

Os pontos são as letras A, B, C.

Só uma reta: $\{A, B, C\}$.

Este modelo não satisfaz I_1, pois não existe ponto fora da reta $\{A, B, C\}$. E claro que satisfaz I_2 I_3. Quanto a P_1 e P_2, eles são satisfeitos, pois a hipótese não está presente, por não existir ponto fora da reta, e, portanto, a tese não pode ser contrariada. Quando a hipótese não está presente, dizemos que a afirmação está provada por vacuidade.

(b) O axioma I_2 é independente de I_1, I_3, P_1 e P_2.

Modelo que satisfaz I_3, I_3, P_1 e P_2, mas não satisfaz 1_2:

Os pontos são as letras A, B e C. Retas: $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$.

(c) O axioma I_3 é independente de I_1, I_2, P_1 e P_2. Os pontos são as letras A, B e C. Retas: {A, B}, {A,B}, {B, C}. É claro que os 3 primeiro axiomas estão satisfeito. P2 está satisfeito porque não existem paralelas (0 é menor que 1, que é o número máximo permitido de paralelas a uma reta por um ponto fora dela).

Modelo que satisfaz I_1, I_2, P_1 e P_2, mas não satisfáz I_3:

Só um ponto: a letra A.

Retas: nenhuma.

Os quatro"axiomas são satisfeitos por vacuidade. Outro modelo: nenhum ponto e nenhuma reta.

(d) O axioma P_1 é independente de I_1, I_2, I_2 e P_2.

Modelo que satisfaz I_1, I_2, I_3 e P_2, mas não satisfáz P_1:

Os pontos são as letras A, B e C.

Retas: $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{13, C\}$.

É claro que os 3 primeiro axiomas estão satisfeito. P2 está satisfeito porque não existem paralelas (0 é menor que 1, que é o número máximo permitido de paralelas a uma reta por um ponto fora dela).

(e) O axioma P_2 é independente de I_1, I_2, I_3 e P_1.

Modelo que satisfaz I_1, I_2, I_3 e P_1, mas não satisfáz P_2:

Os pontos são as letras A, B e C.

Retas: $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$, $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$.

Pelo ponto B que está fora da reta $\{A\}$ passam duas paralelas a $\{A\}$: as retas $\{B, C\}$ e $\{B\}$. Portanto, P_2 não está satisfeito.

2.3. *Dado um ponto P, considere todas as retas que passam por P. Então qualquer ponto está em pelo menos uma dessas retas. Prove. Você precisa de P_1 e P_2 para provar esta afirmação?*

Resposta:

Seja P um ponto (hipótese). Seja A outro ponto qualquer. Pelo Axioma I_2, existe uma reta que contém Pe A. Portanto, A está numa reta que passa por P. O único axioma utilizado foi I_2.

2.4. ***Lema da transversal.*** *Sejam r e s retas paralelas. Se uma reta t corta r, então t corta também s. Prove. Observe que você não usa P_1, mas usa P_2 na demonstração.*

Resposta:

Veja a figura abaixo. Seja P o ponto em que t corta r. Se t não cortasse s, ela seria paralela a s. Neste caso, teríamos duas retas paralelas a s, passando pelo ponto P: t e r. Mas isto contraria P_2. Logo, t tem que cortar s. O Axioma P_1 não foi utilizado.

{Fig:02:L02:04}

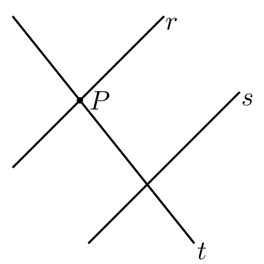


Figura 2.9: Lema da Transversal.

2.5. *Como você prova que o axioma P_2 é indispensável para provar o Lema da transversal?*

Resposta:

Basta mostrar que o P_2 da transversal não é válido num modelo satisfazendo os outros axiomas, mas que não satisfaz P_2. [Por que? Porque se o lema da transversal fosse um teorema provado a partir dos outros quatro axiomas, então ele seria válido em qualquer modelo que satisfizesse aqueles axiomas.] No modelo dado no Exercício 2 (e), as retas $\{A\}$ e $\{B\}$ são paralelas; a reta $\{B, C\}$ corta a reta $\{B\}$ mas não corta a reta $\{A\}$. Logo, o Lema da transversal não vale neste modelo.

2.6. ***Propriedade transitiva de paralelismo.*** *Se r é paralela a s, e s é paralela a t, então r é paralela a t. Prove.*

Resposta:

Hipótese: $r \parallel s$, $s \parallel t$.

Tese: $r \parallel t$.

Demonstração. Por absurdo. Uma demonstração por absurdo consiste em negar a tese e mostrar que isto contraria ou a hipótese ou algum axioma ou teorema já provado.

Negação da tese: r corta t num ponto P.

Então, pelo ponto P teríamos duas retas, r e t, paralelas a s, pela hipótese. Mas isto contraria o Axioma P_2. Como a negação da tese leva a uma contradição, a tese tem que ser verdadeira. Isto conclui a demonstração. □

2.7. *Prove que o axioma P_2 é indispensável para provar a Propriedade transitiva de paralelismo, mesmo com a presença do axioma P_1.*

Resposta:

Basta exibir um modélo em que P_2 não é satisfeito, no qual a propriedade transitiva de paralelismo não é válida. O modelo do Exercício 2 (e) é bom para isto. Nele, tem-se: $\{B\}$ é paralela a $\{A\}$ e $\{A\}$ é paralela a $\{B, C\}$, mas $\{B\}$ não é paralela a $\{B, C\}$.

2.8. *Use o Lema da transversal para provar o Teorema 2.1.*

Resposta:

Hipótese: r é uma reta qualque

Tese: existem dois pontos em r

Demonstração. Seja r uma reta qualquer (hipótese). Faça uma figura.

i Seja A um ponto fora de r.

ii Seja s uma reta paralela a r por A (PI).

iii Seja B um ponto fora de s aplicado a s).

iv Seja t a reta determinada por A e B (12).

v Pelo Lema da transversal, t (a transversal) corta r em um ponto C [(pois $r \parallel s$).

vi Seja D um ponto fora de t (Ii aplicado a t).

vii Seja u uma reta paralela a t por D (P1).

viii Pelo Lema da transversal, r (a transversal) corta u em um ponto E (pois $u \parallel t$).

Logo, r possui dois pontos, C e E (por que E é distinto de C?). □

2.9. *Prove que o axioma P_2 é indispensável para provar o Teorema 2.1.*

Resposta:

Você deve ter observado que o Axioma P_2 não foi utilizado diretamente na demonstração do Lema 2.2 (Ex. 8), mas o foi indiretamente, pois o Lema da transversal depende de P_2. Para provar que P_2 é indispensável para o Teorema 2.1, basta exibir um modelo em que P_2 não é satisfeito, no qual o Teorema 2.1 não vale. O modelo do Exercício 2 (e) serve a este propósito Nele, tem-se reta com apenas um ponto, por exemplo a reta $\{B\}$.

2.10. *Prove o Teorema 2.3. É impossível provar que existem mais de 4 pontos e mais de 6 retas?*

Resposta:
A figura abaixo sugere uma demonstração do Teorema 2.3, diferente da que foi dada no Roteiro 2. Descreva e justifique cada passo da demonstração.

{Fig:02:L02:10}

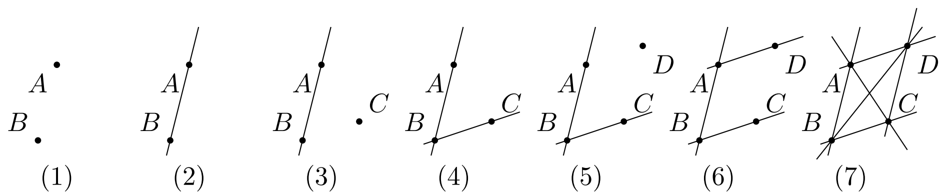


Figura 2.10: Lema da Transversal.

2.11. *Por que você é capaz de construir modelos (satisfazendo os 5 axiomas) com 4, 9 e 16 pontos, mas não é capaz de construir modelos com 5, 6, 14 ou 15 pontos?*

Esta é uma questão difícil. Os matemáticos gostam de desafios como este. Mas eles vivem disto; podem passar horas, dias, meses e até anos tentando resolver uma questão. (Leia, por exemplo, o livro: O Último Teorema de Fermat. Simon Singh. Editora Record, Rio de Janeiro, 1999, 324p.) Você não deve gastar mais que alguns minutos nesta questão. Se não conseguir, passe para frente.

Resposta:
Modelos com 4 e com 9 pontos foram construídos no Roteiro 2. Se você quiser, você consegue construir um modelo com 16 pontos. Agora, a Proposição do Exercício 13, afirma que a totalidade dos pontos é um quadrado perfeito ($n = k^2 2$). Logo, - não podem existir modelos com 5, 6, etc pontos.

Nos exercícios seguintes, k é o número de pontos de uma reta; m é o número de retas que passam por um dado ponto; e n é o número total de. pontos. Você não acha surpreendente que os cinco axiomas impliquem as fórmulas dadas nos exercícios? Antes de tentar prová-las, teste-as nos modelos que você conhece.

2.12. *Prove o Teorema 2.4.*

Se uma reta r possui k pontos, então qualquer reta s também possui k pontos.

Resposta:
Se você não conseguir fazer a demonstração sozinho, consulte o Roteiro 2.

2.13. *Prove o Teorema 2.5. Sejam k é o número de pontos de uma reta; m o número de retas que passam por um dado ponto; e n o número total de pontos. Você não acha surpreendente que os cinco axiomas impliquem as fórmulas dadas nas proposições seguintes? Antes de tentar prová-las, teste-as nos modelos que você conhece.*

Resposta:
Se você não conseguir fazer a delonstração sozinho, consulte o Roteiro 2.

2.14. *Proposição.* $m = k + 1$.

Resposta:

Demonstração. Já vimos que cada reta possui o mesmo número de pontos e que a quantidade de retas que passa por um ponto independe do ponto. Seja P um ponto qualquer e seja r uma reta que não contém P (existe?). Sejam A_1, ..., A_k os pontos de r. Mostraremos que existem exatamente $m + 1$ retas passando por P.

{Fig:02:L02:14}

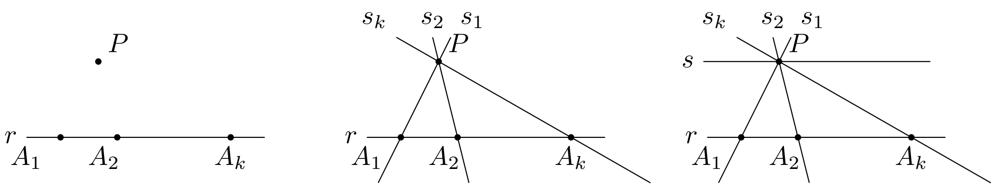


Figura 2.11: Proposição: $m = k + 1$.

Sejam s_1, ..., s_k as retas que passam por P e por A_1, ..., A_k, respectivamente. Até aqui temos k retas passando por P. Existe mais uma reta passando por P: é a reta s paralela a r por P. Isto totaliza $k + 1$ retas passando por P. Estas são as únicas retas que passam por P (por que se passasse outra reta por P, ela teria que cortar r e .... continue). Isto prova que $m = k + 1$. □

2.15. *Proposição.* $n = m(k - 1) + 1$, *o que é o mesmo que* $n = k^2$. *(Com esta fórmula em mente, volte agora ao Exercício 11.)*

Resposta:
Seja A um ponto. Por A passam m retas. Sem contar com o ponto A, cada uma dessas m retas possui $k-1$ pontos. Sem contar com A, a totalidade de pontos nessas retas é $m(k-1)$. Acrescentando o ponto A totalizamos $m(k-1)+1$ pontos. Não existe ponto fora dessas m retas (veja o exercício 3). Logo, o total de pontos é $n = m(r-1)+1$. Use agora a fórmula do exercício 14 para obter $n = k^2$.

Corrigido Ex. 3 para exercício 3

{Fig:02:L02:15}

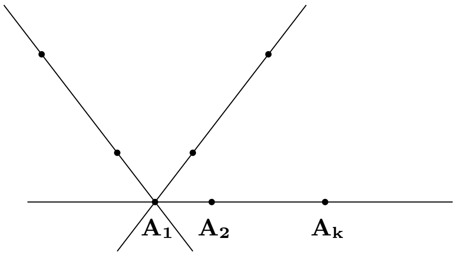


Figura 2.12: Proposição: $n = m(k-1)+1$.

2.16. *Proposição. O número total de retas é mk, o que é o mesmo que $n+k$.*

Resposta:
Seja A_1 um ponto. Sejam r_1, ..., r_m as m retas que passam por A_1. Sejam A_2, ..., A_k, os restantes pontos de r_i. Por cada ponto $A_i, i \geq 2$, passam $m-1$ retas paralelas às retas r, $i \geq 2$, respectivamente. Sem contar com a reta r_1, temõs até agora $(m-1)k$ retas. Contando com a reta r_1, dá um total de $(m-1)k+1$ retas. Restam agora apenas as retas que são paralelas a r_1, já que todas as retas que interceptam r_1 já foram contadas. Quantas são elas? Vejamos. Sejam B_2, ..., B_k os restantes pontos de r_2. Sejam t_2, ..., t_k retas paralelas a r_1, passando por B_2, .., B_k; estas totalizam $k+1$ retas. Agora, juntamente com as retas já citadas, temos um total de $(m-1)k+1+k-1$, ou seja, mk retas. Não há retas além destas (por que?). Logo, o total de retas é mk. Como você obtém a outra expressão $n+k$?

{Fig:02:L02:16}

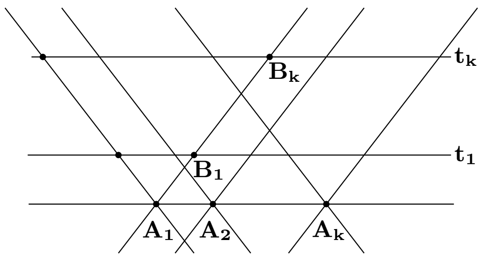


Figura 2.13: Proposição: Existem $mk = n+k$ retas.

Capítulo 3

Cardinalidade

{roteiro:3}

3.1 Roteiro 3. Cardinalidade

Card substituido por $\mathcal{C}$

Partes substituido por $\mathbf{\Pi}$

Conteúdo: Conjuntos finito e infinito. Correspondência biunívoca. Conjuntos de mesma cardinalidade. Conjuntos enumeráveis. Conjuntos com a cardinalidade do continuum. $\mathcal{C}(A) < \mathcal{C}(\diamond(A))$.

Item 3.1. Por que é interessante estudar conjuntos infinitos? {item:3:1}

Item 3.2. Exemplos de conjuntos: {item:3:2}
Finito: $A = \{a, b, c, d, e\}$
Infinito: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ (conjunto dos números naturais).
Pares $= \{2, 4, 6, ...\}$ (conjunto dos números pares).

Item 3.3. Que propriedade serve para distinguir conjunto infinito de finito? {item:3:3}

Observemos que não é possível construir uma correspondência biunívoca entre o conjunto finito A, dado acima, e uma parte própria de A (subconjunto de A que não é todo o A), por exemplo, o conjunto $B = \{a, b, c, d\}$, já que uma função de A em B terá que levar dois elementos de A num mesmo elemento de B.
Já a correspondência abaixo

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & ... & n & ... \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & ... & 2n & ... \end{array}$$

é uma correspondência biunívoca entre N e o conjunto dos números pares, que é um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$.

Item 3.4. O que é conjunto infinito? {item:3:4} {def:dedeki

Definição 3.1. *(Dedekind). Um conjunto é* ***infinito*** *se existe uma correspondência biunívoca entre ele e um subconjunto próprio dele. É* ***finito*** *se não for infinito.*

f:correspondance}

Definição 3.2. *Uma* ***correspondência biunívoca*** *ou* ***bijeção*** *entre dois conjuntos A e B é uma função $f : A \to B$ que é injetora e sobrejetora. A função f é* ***injetora*** *se $f(x) = f(y)$ implica $x = y$, quaisquer que sejam x, y em A. É* ***sobrejetora*** *se, dado z em B, existe x em A tal que $f(x) = z$.* ***Bijetora*** *significa injetora e sobrejetora.*

{item:3:5} ***Item 3.5.*** A função $f : \mathbb{N} \to$ Números Pares, dada por $f(n) = 2n$ é uma bijeção.

Prova de que f é injetora: Suponhamos que $f(n_1) = f(n_2)$; então $2n_1 = 2n_2$. Daqui decorre que $n_1 = n_2$. Prova de que f é sobrejetora: Seja z um número par. Devemos exibir um número natural x tal que $f(x) = z$. Basta tomar $x = z/2$. Como z é par, $z/2$ é um número natural, e $f(x) = f(z/2) = 2xz/2 = z$.

{item:3:6} ***Item 3.6.*** Para conjuntos finitos é fácil dizer quando um conjunto tem mais elementos que outro. E para conjuntos infinitos, tem sentido isto?

Sim, por incrível que pareça. O matemático alemão Georg Cantor (1845-1918) inaugurou esta discussão, criando uma teoria completamente nova para os conjuntos infinitos. O conceito fundamental é o de cardinalidade.

{item:3:7} ***Item 3.7.*** Que significa dizer que dois conjuntos infinitos são do "mesmo tamanho", ou melhor, têm a mesma cardinalidade?

{def:cardinality}

Definição 3.3. *Dois conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade se existe uma correspondência biunívoca entre eles. Notação: $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$.*

{item:3:8} ***Item 3.8.*** $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ têm a mesma cardinalidade?

Sim. O esquema abaixo indica a correspondência:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & ... \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & ... \end{array}$$

Aqui está a expressão para a bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$; é $f(n) = (n-1)/2$, se n é ímpar, e $f(n) = n/2$, se n é par. A sua inversa é $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, sendo $g(n) = 2n$, para $n > O$, $g(n) = -2n + 1$, para $n < O$ e $g(0) = O$.

{item:3:9} ***Item 3.9.*** O que é um conjunto enumerável?

{def:enumerable}

Definição 3.4. *Um conjunto é* ***enumerável*** *se tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$.*

{item:3:10} ***Item 3.10.*** O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável?

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável? Incrível, mas sim! Cantor conseguiu construir uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$. Primeiro organizamos todos os números racionais positivos num quadro como o seguinte:

	1	2	3	4	...	q	...
1	1/1	1/2	1/3	1/4		...	
2	2/1	2/2	2/3	2/4		...	
3	3/1	3/2	3/3	3/4		...	
4	4/1	4/2	4/3	4/4		...	
...							
p	...	...	...	...		p/q	
...							

Na primeira linha e na primeira coluna aparecem os números naturais; o número racional p/q figura no cruzamento da linha correspondente ao número natural p com a coluna encabeçada pelo número natural q. Todos os números racionais positivos estão no quadro, porque p e q assumem todos os números naturais. Mas há repetições, pois as frações não estão todas na forma irredutível. Por exemplo, o.número 1 aparece nas formas 1/1, 2/2, 3/3 etc. Agora, escrevemos os números racionais numa seqüência, percorrendo o quadro a partir do número 1/1, indo para 1/2 na mesma linha, descendo em diagonal para 2/1, seguindo na mesma coluna para 3/1, subindo em diagonal para 2/2 e 1/3 e assim por diante, numa estratégia denominada processo diagonal de Cantor, tendo o cuidado de omitir os números racionais que se repetem. Obtém-se, assim a seqüência (os números entre parênteses, que são as frações que podem ser simplificadas, são retirados porque já aparecem antes, na seqüência):

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & ... & n & ... \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
1/1 & 1/2 & 2/1 & 3/1 & (2/2) & 1/3 & 1/4 & 2/3 & 3/2 & 4/1 & 5/1 & & f(n) &
\end{array}$$

Fazendo f(n) igual ao n-ésimo termo da seqüência obtemos uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e o conjunto dos números racionais positivos. Há uma fórmula para $f(n)$, mas não é necessário explicitá-la. Como estender agora para os racionais negativos e o zero? A partir da correspondência acima, formamos outra correspondência salteando para incluir o O e os racionais negativos, como indica o esquema abaixo:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & ... \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & 0 & 1/1 & -1/1 & 1/2 & -1/2 & 2/1 & -2/1 & 3/1 & -3/1 & 1/3
\end{array}$$

Se o leitor se interessar aqui está a expressão para esta correspondência g em termos de f. Definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ por $g(1) = O$, $g(n) = f(n/2)$, se n é par, e $g(n) = -f((n-1)/2)$, se n é ímpar ($n > 1$). Esta é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$.

Item 3.11. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é enumerável? {item:3:11}

Não. Cantor conseguiu provar que não existe correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$. A sua demonstração é uma das mais bonitas da matemática.
Antes de mais nada, o que é um número real? Os matemáticos trabalharam por séculos sem uma definição precisa de numéro real. A sua definição rigorosa foi feita pela primeira vez em 1872 pelo matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916). Aqui, representaremos um número real na forma decimal infinita.
Começamos mostrando que não pode existir uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e o conjunto $\mathbb{I}$ dos números reais compreendidos entre O e 1.
Os números reais compreendidos entre O e 1 podem ser escritos na forma decimal infinita como, por exemplo, 0,57203... . As chamadas dízimas periódicas, como 0,4232323..., correspondem aos números racionais; as outras representam os números irracionais. Os números que têm uma parte periódica igual a 9 têm outra representação com parte periódica igual a 0. Para que cada número tenha uma única representação, descartaremos as que têm 9 como parte periódica. Por exemplo, para o número racional 1/5 usaremos a representação decimal 0,2000 .. em vez de 0,19999 ... . Usaremos a notação $0, a_1a_2a_3$ ... para indicar um número de $\mathbb{I}$. Nesta notação, os dígitos a_n assumem os valores 0, 1, ... , 9.
Suponhamos, pois, por absurdo, que existe uma correspondência biunívoca f entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{I}$. Então todos os números de $\mathbb{I}$ estão numa seqüência como indica a tabela abaixo.

$$
\begin{array}{l}
f(1) = 0, a_1a_2a_3a_4... \\
f(2) = 0, b_1b_2b_3b_4... \\
f(3) = 0, c_1c_2c_3c_4... \\
....
\end{array}
$$

Para obter a contradição, vamos construir um número x pertencente a $\mathbb{I}$, diferente de qualquer $f(n)$. O número x terá a representação decimal $0, x_1x_2x_3$, em que os seus dígitos x_n são escolhidos da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{l}
x_1 = 1 \text{ se } a_1 \neq 1 \text{ e } x_i = 0 \text{ se } a_1 = 1, \\
x_2 = 1 \text{ se } b_2 = 1 \text{ e } x_2 = O \text{ se } b_2 = 1, \\
x_3 = 1 \text{ se } c_3 = 1 \text{ e } x_3 = O \text{ se } c_3 = 1, \\
x_2 = 1 \text{ se } b_2 = 1 \text{ e } x_2 = O \text{ se } b_2 = 1, \\
....
\end{array}
$$

$x_1 \neq a_1$ (o primeiro de dígito de $f(1)$), $x_2 \neq b_2$ (o segundo dígito de f(2)) e assim por diante. Deste modo, o número x terá pelo menos um dígito diferente de cada um dos números $f(n)$ e, assim, será diferente de cada um deles, qualquer que seja n, porque o n-ésimo dígito do número x é diferente do n-ésimo dígito do número $f(n)$. Portanto, a seqüência dos $f(n)$ não esgota todo o $\mathbb{I}$, contrariando o fato de que f é sobrejetora. Concluímos, pois, que não existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{I}$. Mostraremos agora que não existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$. A função dada por $y = \ln[x/(1-x)]$ é uma bijeção entre $\mathbb{I}$ e $\mathbb{R}$. A sua inversa h é uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{I}$. Se existisse uma bijeção g entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, a função composta hog seria uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{I}$ que, já vimos, não pode existir. Portanto, não existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, concluindo a demonstração de que $\mathbb{R}$ não é enumerável.

Item 3.12. {item:3:12}
{def:continuum}

Definição 3.5. *Para os conjuntos que têm a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$ diremos que têm a cardinalidade de **continuum**.*

Item 3.13. {item:3:13}
{def:cardinality:

Definição 3.6. *Dados dois conjuntos A e B, diremos que a cardinalidade de A é menor que a cardinalidade de B (notação: $\mathcal{C}(A) < \mathcal{C}(B)$), se A e B não têm a mesma cardinalidade e se existe uma função injetora entre A e um subconjunto de B. [Desta última condição resulta que existe uma bijeção entre A e um subconjunto de B.]*

Exemplo. Card($\mathbb{N} < \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Primeiro. $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ não têm a mesma cardinalidade. Segundo. A função $f(n) = n$ é correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e o subconjunto $\mathbb{N}$ de $\mathbb{R}$.

Item 3.14. Pergunta. Existe conjunto com cardinalidade maior que a de R? {item:3:14}

Sim. Mas não pense que são os conjuntos $\mathbb{C}$ (números complexos), $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$. Por incrível que pareça, todos estes conjuntos têm a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$ (veja Lista de Exercícios n. 3). Cantor responde: o conjunto de todas as partes (ou subconjuntos) de $\mathbb{R}$ tem cardinalidade maior que a de $\mathbb{R}$. Cantor provou que a cardinalidade de um conjunto A é menor que a cardinalidade do conjunto formado com as partes de A.
Antes de abordar o caso geral consideremos o caso em que A é finito, digamos $A = \{a, b\}$. Então $\diamond(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. [$\diamond(A)$ é o conjunto constituído de todos os subconjuntos de A]. A função

$$f : A \to \{\{a\}, \{b\}\},$$

que leva $a \to \{a\}$ e $b \to \{b\}$, é uma bijeção entre $A = \{a, b\}$ e o subconjunto $\{\{a\}, \{b\}\}$ de $\diamond(A)$. Além disso, não existe bijeção entre A e o conjunto $\diamond(A)$. Portanto, $\mathcal{C}(A) < \mathcal{C}(\diamond(A))$.
Pergunta: O que é o conjunto $C = \{x \in A |\ x$ não pertence a $f(x)\}$?
Resposta: $C = \emptyset$.
Agora, se $g : A \to \diamond(A)$ é a função $a \to \{b\}$, $b \to \{a, b\}$, o que é o conjunto $B = \{xeA |\ x$ não pertence a $f(x)\}$? Resposta: $B = \{a\}$. Estas perguntas foram feitas para preparar o aluno para o caso geral, que é abordado no teorema seguinte.

ardinality:parts}

Teorema 3.1. $\mathcal{C}(A) < \mathcal{C}(\diamond(B))$.

Não é fácil de entendê-la. A função $x \to \{x\}$ é uma função injetora entre A e um subconjunto de A. Uma parte da definição está cumprida. Resta mostrar que A e $\diamond(A)$ não têm a mesma cardinalidade.
Consideremos uma função $f : A \to \diamond(A)$. Aqui, para cada $x \in A$, $f(x)$ é um subconjunto de A. Vamos mostrar que f não pode ser sobrejetora e, assim, não pode ser bijetora. Para isto, vamos construir um subconjunto C de A para o qual não existe $x \in A$ tal que $f(x) = C$. Com isto estaremos provando que f não é sobrejetora. O conjunto C é caracterizado pela seguinte propriedade: para cada elemento x de A, poremos x em C se e somente se x não pertencer a $f(x)$. De outra maneira:

$$C = \{x \in A |\ x \text{ não pertence a } f(x)\}.$$

Afirmamos que, dado qualquer $x \in A$, o conjunto C é diferente de $f(x)$. De fato, o próprio x não pode estar em C e $f(x)$ ao mesmo tempo (veja o exemplo concreto, acima). Pois, $x \in C$ se e somente x não está em $f(x)$. Isto conclui a demonstração. □

{item:3:15} ***Item 3.15.*** Aplicando o teorema anterior ao conjunto $\mathbb{R}$ teremos $\mathcal{C}(\mathbb{R})$<$\mathcal{C}(\diamond(\mathbb{R}))$.

{item:3:16} ***Item 3.16.*** Pergunta: Existe um conjunto com cardinalidade maior que a do conjunto $\diamond(\mathbb{R})$?

Sim. O conjunto $\diamond(\diamond(\mathbb{R}))$. Na verdade, tem-se

lity:parts:parts}

Teorema 3.2.

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) < \mathcal{C}(\diamond(\mathbb{R})) < \mathcal{C}(\diamond(\diamond(\mathbb{R}))) <$$
$$\mathcal{C}(\diamond(\diamond(\diamond(\mathbb{R})))) < ....$$

{item:3:17} ***Item 3.17.*** Conclusão. Não tem limite para "tamanho"de conjuntos infinitos: qualquer que seja o conjunto A, existe um conjunto B tal que $\mathcal{C}(A) <= \mathcal{C}(B)$, por exemplo, $B = \diamond(A)$.

3.2 Resumo

Definição 3.1 (Dedekind). Um conjunto é **infinito** se existe uma correspondência biunívoca entre ele e um subconjunto próprio dele. É **finito** se não for infinito.

Definição 3.2. Uma **correspondência biunívoca** ou **bijeção** entre dois conjuntos A e B é uma função $f : A \to B$ que é injetora e sobrejetora. A função f é **injetora** se $f(x) = f(y)$ implica $x = y$, quaisquer que sejam x, y em A. É **sobrejetora** se, dado z em B, existe x em A tal que $f(x) = z$. **Bijetora** significa injetora e sobrejetora.

Definição 3.3. Dois conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade se existe uma correspondência biunívoca entre eles.

Definição 3.4. Um conjunto é **enumerável** se tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$.

Definição 3.5. Para os conjuntos que têm a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$ diremos que têm a cardinalidade de **continuum**.

Definição 3.6. Dados dois conjuntos A e B, diremos que a cardinalidade de A é menor que a cardinalidade de B (notação: $\mathcal{C}(A) < \mathcal{C}(B)$), se A e B não têm a mesma cardinalidade e se existe uma função injetora entre A e um subconjunto de B.

Teorema 3.1. $\mathcal{C}(A) < \mathcal{C}(\diamond(B))$.

Teorema 3.2.

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) < \mathcal{C}(\diamond(\mathbb{R})) < \mathcal{C}(\diamond(\diamond(\mathbb{R}))) <$$

$$\mathcal{C}(\diamond(\diamond(\diamond(\mathbb{R})))) < ....$$

3.3 Lista de Exercícios Exercícios n. 3

3.1. *Mostre que o conjunto dos números naturais ímpares é enumerável.*

3.2. *Seja a um número real positivo. Sejam I o intervalo aberto $(0, a)$ e $\mathbb{R}'$ o conjunto dos números reais positivos. Para mostrar que $(0, a)$ tem a mesma cardinalidade de R, mostre que · (a) a função $g : I$*

(a) a função $g : I \Rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $g(x) = x(a - x)$ é uma bijeção.

(b) a função $f : 1 \Rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln [x/(a - x)]$ é uma bijeção . ($\ln$ *significa logaritmo neperiano).*

3.3. *Mostre que o conjunto dos números reais maiores que O tem a cardinalidade do continuum.*

3.4. *Mostre que os intervalos de números reais* $(0, 1)$, $[0, 1)$, $(0, 1]$, *e* $[0, 1]$ *têm a mesma cardinalidade de* $\mathbb{R}$.

3.5. *Mostre que* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{R}^2$ *têm a mesma cardinalidade.*

Capítulo 4

Axioma da Régua

4.1 Roteiro 4. Axioma da Régua {roteiro:4}

Conteúdo: Axioma da régua. Distância entre dois pontos. Sistema de coordenadas para uma reta. Modelo cartesiano. Modelo do taxista. Circunferência. Ponto entre dois pontos. Segmento. Triângulo. Mediatriz de um segmento.

Item 4.1. Por que é importante estudar retas infinitas? {item:4:1}

Item 4.2. A partir dos axiomas I_1, I_2, I_3, P_1 e P_2 é possível provar que uma reta tem infinitos pontos? {item:4:2}

Não. O modelo com 4 pontos e 6 retas satisfaz os cinco axiomas, mas cada reta é um conjunto com dois pontos.

Item 4.3. Então, se queremos que cada reta tenha infinitos pontos devemos declarar isto na forma de axioma. Vimos que existem conjuntos infinitos de diferentes cardinalidades. Qual delas adotar? O tradicional é adotar para a reta a mesma cardinalidade dos números reais. Como fazemos isto? {item:4:3}

Exigindo que exista uma bijeção $f_r : r \to \mathbb{R}$ entre cada reta r e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

Item 4.4. Algumas características de $\mathbb{R}$, como distância entre dois números, são interessantes para a geometria e podem ser transportadas para uma reta r pela bijeção $f_r : r \to \mathbb{R}$, para definir a distância entre dois pontos de uma reta. Como? {item:4:4}

Dados dois pontos A e B em r, $f_r(A) = a$ e $f_r(B) = b$ são números reais. A distância entre esses números é dada por $|a - b|$. Podemos, se quiser, declarar que a distância entre os pontos A e B é a mesma que a distância entre os números a e b: $d(A, B) = |a - b| = |f_r(A) - f_r(B)|$. E é o que faremos.

{Fig:04:04}

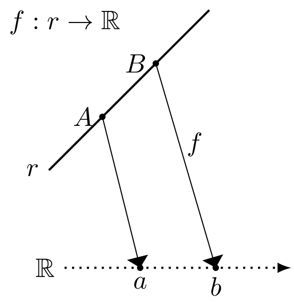


Figura 4.1: Aplicação distância na reta inclinada.

{item:4:5} ***Item 4.5.*** Como seria o enunciado do axioma de modo a incorporar os dois objetos: reta infinita e distância entre dois pontos?

Axioma 7 (Axioma da régua)**.** *Existe uma função $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ e, para cada reta r, existe uma função bijetora $f_r : r \to \mathbb{R}$, associada com d por*

$$d(A, B) = |f_r(A) - f_r(B)|,$$

quaisquer que sejam os pontos A e B de r. [Aqui, $\mathcal{P}$ representa o conjunto de todos os pontos.]

{item:4:6} ***Item 4.6.*** Os novos objetos introduzidos têm nomes:
Definições. A função d é denominada **função distância** e o número real $d(A, B)$ é a **distância** entre os pontos A e B; a função f_r é um **sistema de coordenadas** para a reta r e o número $f_r(A)$ é a **coordenada** do ponto A dada pelo sistema de coordenadas f_r. Dizemos que f_r é um sistema de coordenadas de r **associado** à função distância d.

{item:4:7} ***Item 4.7.*** Está na hora de construir um modelo que satisfaça os cinco axiomas anteriores e o novo axioma da régua: o modelo cartesiano.

Ponto: par de números reais (x, y).
Reta: conjunto de pontos (x, y) que satisfaz uma equação do primeiro grau em x e y: $ax + by + c = O$.
Em geometria analítica, esta é a equação geral da reta. Outra forma de equação da reta: $x = k$ (reta vertical) ou $y = mx + k$ (reta inclinada ou horizontal (quando $m = O$)). Neste modelo, a relação de incidência é definida assim: um ponto pertence à reta se as suas coordenadas satisfazem à equação da reta. Com muito trabalho pode-se verificar que os axiomas de incidência e de paralelismo estão

satisfeitos. Vejamos a verificação do axioma da régua. Para a função distância tomamos a fórmula da distância cartesiana:

$$d_c(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

sendo $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. (Usamos d_c para indicar que se trata da distância cartesiana.) Agora, construir um sistema de coordenadas f_r para cada reta r que se ajuste à distância cartesiana não é fácil. Demanda uma boa inspiração. A inspiração vem dos cálculos que fazemos abaixo.

Caso (a). A reta r é uma reta vertical, de equação $x = a$. Para cada ponto (a, y) de r definimos

$$f_r(a, y) = y$$

É claro que $f_r : r \to \mathbb{R}$ é bijetora. Também satisfaz a igualdade que aparece no Axioma da régua, pois

$$|f_r(A) - f_r(B)| = |f_r(a, y_1) f_r(a, y_2)| = |y_1 - y_2| = d_c(A, B).$$

{Fig:04:04:1}

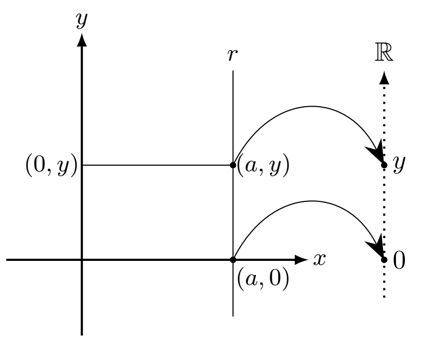


Figura 4.2: Axioma da Régua.

Caso (b). A reta r é uma reta não-vertical, de equação $y = mx + b$ (veja a figura abaixo). Este inclui o caso em que a reta r é horizontal, quando $m = O$. Para $A = (x_1, mx_1 + b)$ e $B = (x_2, mx_2 + b)$ em r, deveremos ter

$$\begin{aligned} d_C(A,B) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (mx_1 + b - mx_2 - b)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + m^1(x_1 - x_2)^2} \\ &= |x_1 - x_2| \sqrt{1 + m^2} \end{aligned}$$

$$= \left| x_1\sqrt{1+m^2} - x_2\sqrt{1+m^2} \right|$$

Para satisfazer a igualdade que aparece no Axioma da Régua, esta última expressão deverá ser igual a

$$|f_r(A) - f_r(B)|$$

Isto sugere definir

$$f_r(x,y) = x\sqrt{1+m^2}$$

para um ponto qualquer (x,y) da reta $y = mx+b$. Assim sendo, d_c e f_r satisfazem a igualdade que aparece no Axioma da Régua. Resta mostrar que f_r é bijetora.

1. Prova de que f_r é injetora. Suponhamos que $f_r(x_1,y_1) = f_r(x_2,y_2)$.

   Então $x_1\sqrt{1+m^2} = x_2\sqrt{1+m^2}$, donde $x_1 = x_2$ e $y_1 = mx_1 + b = mx_2 + b = y_2$.

   Portanto, $(x_1,y_1) = (x2,y2)$ e f_r é injetora.

2. Prova de que f_r é sobrejetora. Dado um número real z queremos determinar um ponto (x,y) em r tal que

   Basta fazer

$$x = \frac{z}{\sqrt{1+m^2}} \quad e \qquad y = \frac{mz}{\sqrt{1+m^2}} + b$$

{Fig:04:04:2}

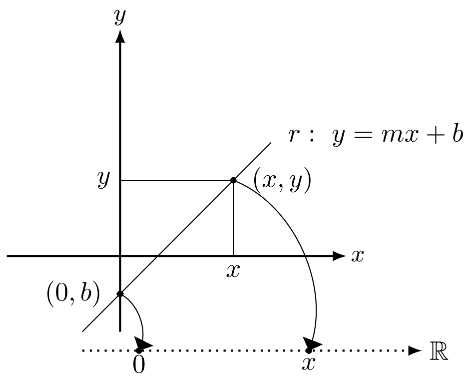


Figura 4.3: Axioma da Régua no modelo Cartesiano.

{item:4:8} ***Item 4.8.*** Outro modelo: Modelo do taxista.

No modelo do taxista, ponto e reta são representados como no modelo cartesiano. A função distância, porém, é diferente. A distância do taxista $d_r(A, B)$ entre os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ é dada por

$$d_r(1, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Na figura abaixo, além de uma representação intuitiva dos pontos A e B, aparece também o triângulo ABC cujos lados horizontal AC e vertical BC medem $|x_1 - x_2|$ e $|y_1 - y_2|$, respectivamente. Se imaginarmos as ruas de uma cidade paralelas ao eixo Ox e as avenidas paralelas ao eixo Oy, para ir do ponto A ao ponto B, o taxista percorre o trecho AC numa rua e o trecho CB numa avenida, já que ele não tem acesso ao itinerário direto AB. Esta é apenas uma metáfora para ilustrar o fato de que, em abstrato, a distância de A a B é a soma de AC com BC. Com esta interpretação, dá para perceber que a distância do taxista entre A e B é maior que a distância cartesiana entre os mesmos pontos. Elas coincidem quando os dois pontos estão numa mesma horizontal ou numa mesma vertical.

{Fig:04:08}

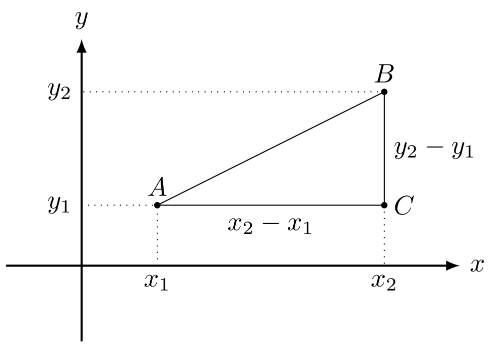


Figura 4.4: Função distância no Modelo de Taxista.

Para mostrar que o modelo do taxista satisfaz o Axioma da Régua, precisamos definir para cada reta r um sistema de coordenadas f_r que satisfaça a igualdade que aparece no enunciado do axioma. O leitor não terá dificuldade em verificar que as funções abaixo são sistemas de coordenadas associados à função distância d_r.

(a) Quando r é uma reta vertical, de equação x = a:

$$f_r(a, y) = y.$$

(b) Quando r é uma reta não-vertical de equação $y = mx + b$:

$$f_r(x, y) = x(1 + |m|)$$

{item:4:9} ***Item 4.9.*** Qual objeto é mais complexo, circunferência ou triângulo?

Mais complexo em que sentido? Neste momento já temos condições de definir circunferência, mas não temos condições de definir triângulo, pois, para este, precisaremos, antes, da definição de segmento, como veremos. Para a definição de circunferência basta o objeto já introduzido distância; para definir triângulo precisamos do objeto segmento que, por sua vez precisa da relação ponto entre dois pontos. Compare as hierarquias dos conceitos nos itens 10 e 15.

{item:4:10} ***Item 4.10.*** O que é circunferência? Interior de circunferência? Exterior?

Definição 4.1. *Circunferência de centro C e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos P tais que $d(P, C) = r$. O ponto P. está no interior se $d(P, C) < r$; está no exterior se $d(P, C) > r$. Notação:*

$$Circ(C, r) = \{P |\ d(P, C) = r\}$$

A hierarquia dos objetos envolvidos com o objeto circunferência é ilustrada abaixo:

$$\boxed{\text{ponto}} \longrightarrow \boxed{\text{distância entre pontos}} \longrightarrow \boxed{\text{circumferência}}$$

{item:4:11} ***Item 4.11.*** Circunferência de centro $C = (0, 0)$ e raio 1, no modelo do taxista.

Sendo P = (x, y), a distância do taxista de P a C é

$$d_T(P, C) = |x - 0| + |y - 0| = |x| + |y|$$

Portanto, a equação da circunferência pedida é

$$|x| + |y| = 1.$$

Como se sabe,

$$|x| = x, \text{ se } x > 0 \quad \text{e} \quad |x| = -x, \text{ se } x < 0.$$

Sendo assim, para se desvencilhar dos módulos que aparecem na equação, temos que decompor o plano xOy em 4 regiões:

$$(I) x \geq 0, y \geq 0, \quad (II) x \geq 0, y < 0, \quad (III) x < 0, y \geq 0, \quad (IV) x < 0, y < 0,$$

Região (I). Nesta região, temos $|x| = x$ = x e $|y| = y$, e a equação torna-se $x + y = 1$ que é a equação de uma reta, só que restrita à região (I), que é o primeiro quadrante.
Região (II). Nesta região, temos $|x| = x$ e $|y| = -y$, e a equação torna-se $x - y = 1$ que é a equação de uma reta, só que restrita à região (II), que é o segundo quadrante. Trabalhando com as outras regiões, você concluirá que a circunferência no modelo do taxista é o quadrado desenhado na figura abaixo.

{Fig:04:11}

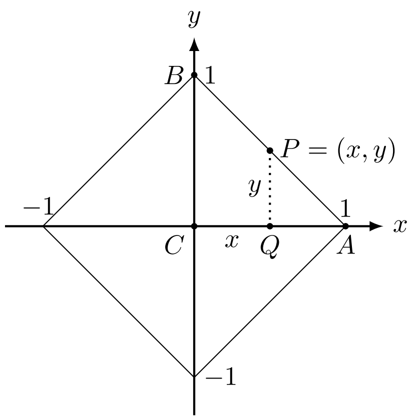


Figura 4.5: Circumferência no Modelo de Taxista.

Pergunta: O ponto P indicado na figura pertence à circunferência. Qual é a distância de P ao centro C? Como se calcula esta distância?
Resposta. Temos

$$d_T(P, C) = |x - 0| + |y - 0| = |x| + |y|$$

Como P pertence à circunferência, as suas coordenadas satisfazem a sua equação $|x| + |y| = 1$. Logo, $d_r(P, C) = 1$.
Pergunta: Qual é o perímetro da circunferência?
Resposta. Basta calcular os comprimentos (no modelo do taxista) dos lados do quadrado. Por exemplo, $d_T(A, B) = 1 + 1 = 2$. Os outros lados são iguais a este. O perímetro é, pois, $4 \times 2 = 8$. Outra maneira de calcular $d_T(A, B)$ é utilizando um sistema de coordenadas f_r para a reta r determinada por A e B. A sua equação é $y = -x + 1$, sendo pois $m = -1$. Logo a expressão de fr é

$$f_r(x, y) = x(1 + |m|) = 2x.$$

Logo, $f_r(A) = f_r(1, 0) = 2$ e $f_r(B) = f_r(0, 1) = 0$. Portanto, $|fr(A) - fr(B)| = |2 - 0| = 2$, que é a distância do taxista de A a B.

Item 4.12. O que é triângulo? {item:4:12}

Definição 4.2. *Dados três pontos não colineares A, B, C (isto é, não pertencentes a uma mesma reta), triângulo ABC é o conjunto formado pelos pontos que estão nos segmentos AB, AC e BC.*

$$\triangle ABC = seg(AB) \cup seg(AC) \cup seg(BC)$$

Para definir triângulo, precisamos da definição de segmento.

{item:4:13} ***Item 4.13.*** O que é segmento?

Definição 4.3. *Dados dois pontos A e B, segmento AB é o conjunto dos pontos entre A e B, mais os pontos A e B.*

$$seg(AB) = \{A, B\} \cup \{X; X \text{está entre } A \text{ e } G\}.$$

Para definir segmento precisamos da definição de ponto entre dois pontos.

{item:4:14} ***Item 4.14.*** Como se define a relação de ordem [ponto] está entre [dois pontos]?

Definição 4.4. *Dizemos que o ponto X está entre os pontos A e B (X distinto de A e B) se*

(1) A, B *e* X *são colineares;*

(2) $d(A, X) + d(X, B) = d(A, B)$.

Usamos a notação $A * X * B$, para indicar que X está entre A e B.

{Fig:04:14}

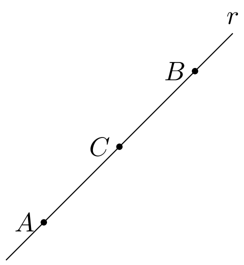
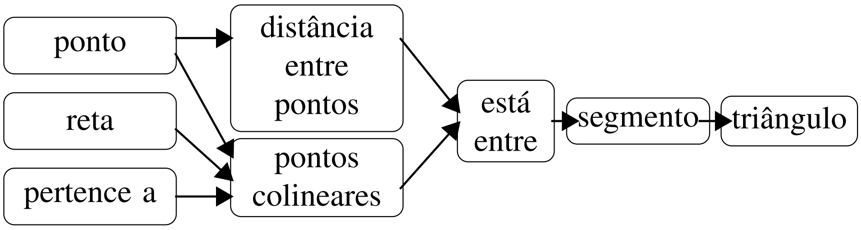


Figura 4.6: X está entre A e B.

{item:4:15} ***Item 4.15.*** Uma definição é o enunciado das propriedades caracterizadoras do objeto definido. No enunciado só podem aparecer termos já definidos anteriormente. A definição de triângulo requer segmento que por sua vez requer a relação ponto entre dois pontos (relação de ordem). Esta última utiliza pontos colineares e distância entre dois pontos já introduzidos anteriormente, encerrando a hierarquia de conceitos. Esta hierarquia está esquematizada na figura abaixo.



Item 4.16. Já dissemos que uma definição por si só não garante a existência do objeto definido. Pergunta: Dados dois pontos A e B, existe um ponto X entre A e B? {item:4:16}

Sim. A figura abaixo indica os passos da construção de um ponto X entre A e B. Começamos com os dois pontos A e B, no passo (1). No passo (2), tomamos a reta r que passa por A e B e, em R, tomamos os números a e b, que são as coordenadas dos pontos A e B em relação a um sistema de coordenadas f_r de r. No passo (3), tomamos um número x entre os números a e b (esta é uma propriedade dos números reais; x pode ser $(a+b)/2$). Finalmente, no passo (4), tomamos o ponto X da reta r, que é o ponto que é levado em x por f_r. A questão que se coloca é: o ponto X está entre A e B? Sim; isto fica provado depois do Teorema A, que será dado no item 17. Assim, fica provada a seguinte proposição:

{prop:existspoint

Proposição 4.1. *Dados dois pontos A e B, existe um ponto X entre A e B.*

{Fig:04:16}

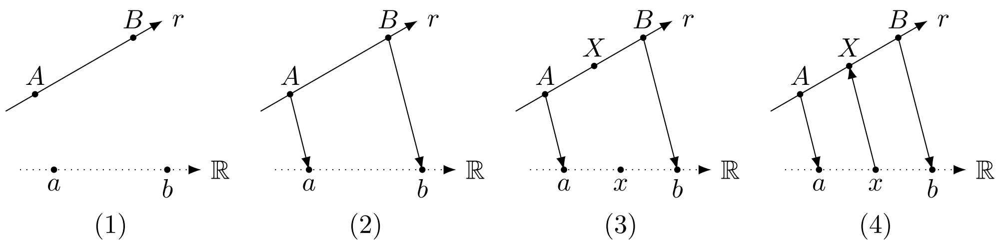


Figura 4.7: Existe ponto entre A e B.

Item 4.17. Dissemos, antes, que distância entre pontos de uma reta corresponde à distância entre números reais. Esta correspondência é feita pela bijeção entre reta e o conjunto dos números reais. Como se relacionam os conceitos ponto entre dois pontos e número entre dois números. A resposta está no teorema seguinte. {item:4:17} {teo:betwee

Teorema 4.2. *Teorema A Seja r a reta que contém os pontos A, B e X e seja f_r uma bijeção entre r e $\mathbb{R}$ associada à distância d. Sejam $x = f_r(X)$, $a = fr(A)$ e $b = f_r(B)$. Então, X está entre A e B se e somente se x está entre a e b.*

{Fig:04:17}

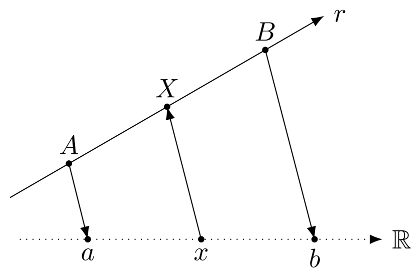


Figura 4.8: X entre A e B se e somente se x entre a e b.

Demonstração. Primeiramente esclarecemos que, para os números reais x, a e b, a relação x está entre a e b significa $a < x < b$ ou $b < x < a$, conforme seja $a < b$ ou $b < a$. Observamos também que, x está entre a e b se e somente se $|a - x| + |x - b| = |a - b|$.
Esta é uma propriedade dos números reais cuja demonstração é longa, porque precisa considerar as diversas combinações possíveis para os módulos que aparecem na igualdade. Não a faremos aqui.
O "se e somente se"do enunciado do teorema significa que estamos diante de dois teoremas, cujas hipóteses e teses são:

(a) hipótese: X está entre A e B; tese: x está entre a e b;

(b) hipótese: x está entre a e b; tese: X está entre A e B.

Demonstração de (a). Antes de começar, observamos que, pelo Axioma da Régua, estando A, B e X na reta r, temos

$$d(A,X) = |a - x|, \quad d(X,B) = |x - b| \;\; e \quad d(A,B) = |a - b|.$$

Agora, partimos da hipótese de que X está entre A e B. Então $d(A,X) + d(X,B) = d(A,B)$, pela definição da relação "está entre". Logo

$$|a - x| + |x - b| = |a - b|. \quad (*)$$

Desta igualdade decorre que x está entre a e b:
Demonstração de (b). Da hipótese (x está entre a e b) decorre a igualdade acima (*) e, desta última, resulta que $d(A,X) + d(X,B) = d(A,B)$. Logo, X está entre A e B. □

{item:4:18} ***Item 4.18.*** O Teorema A permite verificar se um ponto está entre dois outros sem a necessidade de utilizar distância entre dois pontos, como requer a definição do item 14. Para verificar se o ponto X da reta AB está entre A e B, basta verificar se o número x está entre os números reais a e b, sendo estes os números correspondentes aos pontos X, A e B, por um sistema de coordenadas f_r. Ele também pode ser utilizado, com vantagens, para tratar de questões como as dos exercícios 10 e 11 da lista de exercícios n. 4.

Item 4.19. Exemplo no modelo cartesiano. Consideremos os pontos $A = (a, y_1)$ {item:4:19}
e $B = (b, y_2)$ da reta r de equação $y = mx + k$. A bijeção $f_r : r \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f_r(x, y) = x\sqrt{1 + m^2}$$

Se $X = (x, y)$ é um ponto qualquer de r, então

$$A * X * B \quad \Leftrightarrow$$

$$f_r(A) * f_r(X) * f_r(B) \quad \Leftrightarrow$$
$$a\sqrt{1 + m^2} * x\sqrt{1 + m^2} * b\sqrt{1 + m^2} \Leftrightarrow$$
$$a * x * b$$

Conclusão: No modelo cartesiano, o ponto X da reta AB está entre A e B se e somente se a abscissa de X está entre as abscissas de A e B. Disto decorre que o segmento cartesiano AB tem a representação que se costuma fazer em geometria analítica.

{Fig:04:19}

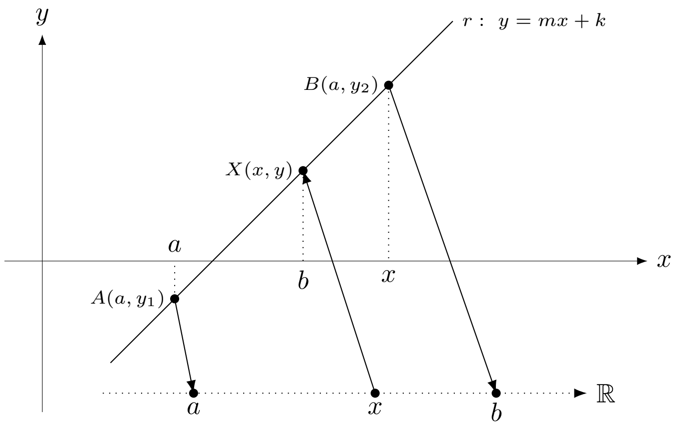


Figura 4.9: $A * X * B$ se e somente se $a * x * b$.

$A * X * B$ se e somente se $a * x * b$

Item 4.20. No modelo do taxista, um segmento também tem a mesma represen- {item:4:20}
tação que a do modelo cartesiano.

{item:4:21} ***Item 4.21.*** É possível definir **mediatriz** de um segmento usando os conceitos introduzidos até agora?

Definição 4.5. ***Mediatriz*** *do segmento* AB *é o conjunto dos pontos* P *tais que* $d(P, A) = d(P, B)$.

{item:4:22} ***Item 4.22.*** No modelo do taxista, sendo $A = (2, 0)$ e $B = (O, 1)$, represente numa figura a mediatriz do segmento AB.

Procuramos os pontos $P = (x, y)$ tais que $d_T(P, A) = d_T(P, B)$, ou seja, tais que

$$|x - 2| + |y| = |x| + |y - 1|$$

Para representar o gráfico desta equação, temos que considerar separadamente as 9 regiões indicadas na figura. As regiões são deliipitadas pelas retas $x - 2 = 0$, $y = 0$, $x = 0$ e $y - 1 = 0$, ou seja $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 1$, que são sugeridas pelas expressões que aparecem dentro dos módulos na equação acima.

{Fig:04:19}

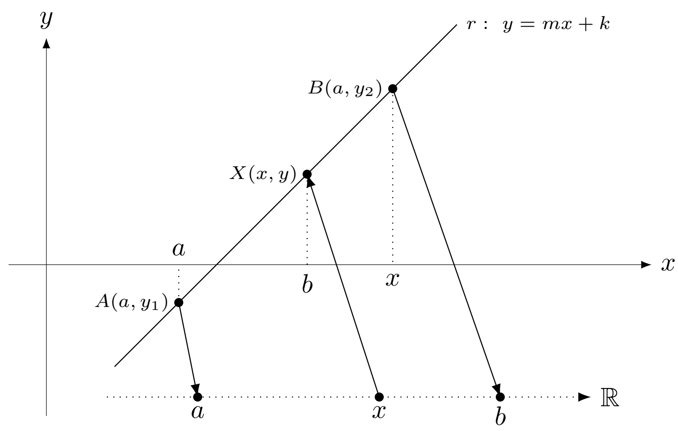


Figura 4.10: $A * X * B$ se e somente se $a * x * b$.

Vejamos o que acontece em algumas dessas regiões.

Região $x \geq 2, y \geq 1$. Nesta região, temos $|x - 2| = x - 2$, $y = y$, $|x| = x$, $|y - 1| = y - 1$. Portanto a equação acima torna-se

$$x - 2 + y = x + y - 1 \text{ ou } 0x + 0y = 1,$$

que não tem solução.

Região $0 \geq x < 22, y \geq 1$. Nesta região, temos $|x-2| = -x+2$, $|y| = y$, $|x| = x$, $|y-1| = y-1$. Portanto a equação acima torna-se

$$-x + 2 + y = x + y - 1 \text{ ou } -2x + 0y = -3,$$

cuja solução é $x = 3/2$, y qualquer. Esta é a equação de uma reta vertical, restrita à região considerada.

Região $0 \geq x < 22, 0 \leq y < 1$. Temos $|x-2| = -x+2$, $|y = y$, $|x| = x$, $|y| = -y+1$. Portanto a equação acima torna-se

$$-x + 2 + y = x - y + 1 \text{ ou } -2x + 2y = -1.$$

Esta é a equação de uma reta vertical, restrita à região considerada, que passa pelos pontos $(3/2, 1)$ e $(1/2, 0)$.

O leitor pode verificar que na região $0 \leq x < 2$, $y < 0$ a solução da equação é a reta vertical $x = 1/2$, e que nas outras regiões a equação não tem solução. O gráfico da mediatriz está representado na figura seguinte.

{Fig:04:19}

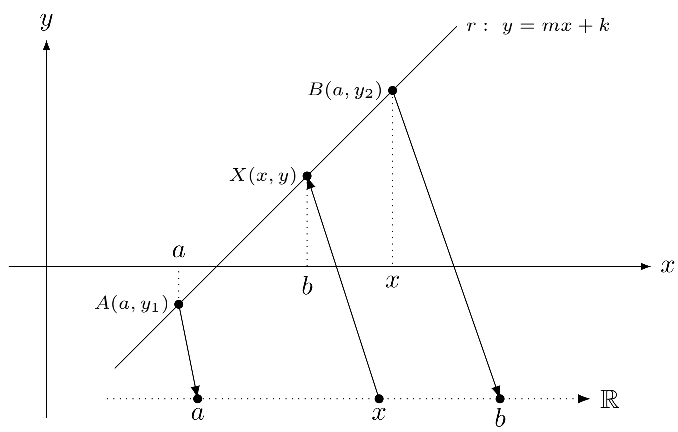


Figura 4.11: $A * X * B$ se e somente se $a * x * b$.

4.2 Resumo

Objetos primitivos: ponto e reta.
Relação primitiva: [ponto] pertence a [reta] ("relação de incidência").
Relação definida: [ponto] está entre [dois pontos] ("relação de ordem").
Objetos definidos: retas que se interceptam; retas paralelas; circunferência; triângulo, mediatriz de um segmento.

Axioma da régua. Existe uma função $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ e, para cada reta r, existe uma função bijetora $f_r : r \to \mathbb{R}$, associada com d por

$$d(A, B) = |f_r(A) - f_r(B)|,$$

quaisquer que sejam os pontos A e B de r. [Aqui, P representa o conjunto de todos os pontos.]
[d é chamada **função distância**, $d(A, B)$ é a **distância** entre A e B e f_r é um **sistema de coordenadas** para a reta r, associado a d. Dizer que f_r e d são associados é dizer que vale a igualdade que aparece no axioma.]

Teorema A. Seja r a reta que contém os pontos A, B e X e seja f_r uma bijeção entre r e $\mathbb{R}$ associada à distância d. Sejam $x = f_r(X)$, $a = fr(A)$ e $b = f_r(B)$. Então, X está entre A e B se e somente se x está entre a e b.

4.3 Lista de Exercícios n. 4

A não ser que esteja explícito em contrário no enunciado do exercício, consideram-se em vigor todos os seis axiomas.

4.1. *O axioma da régua é independente dos cinco primeiros axiomas?*

4.2. *Como você prova que a reta é um conjunto infinito? E ilimitado? O que é "conjunto ilimitado"?*

4.3. *Perguntas:*

(a) $d(A, B) = 0$?

(b) $d(A, B) = d(B, A)$?

(c) $A = Bimplicad(A, B) = 0$?

(d) $d(A, B) = 0$ *implica* $A = B$

4.4. *Seja r uma reta, e seja* f_r *uma sistema de coordenadas para* r*, associado a* d*. Se* g_r *é definida por* $g_r(X) = f_r(X) + k$*, sendo* k *uma constante, então* g_r *é também um sistema de coordenadas para* r*, associado à mesma distância* d*? E* $g_r(X) = kf_r(X)$*? A constante* k *pode ser negativa? Pode ser* 0*?*

4.5. *Quais são as fórmulas para a distância e para as bijeções no modelo cartesiano?*

4.6. *Quais são as fórmulas para a distância e para as bijeções no modelo do taxista?*

4.7. *O que é circunferência?*

4.8. *Faça uma figura representando a circunferência de centro (O, O) e raio 1:*

(a) *no modelo cartesiano;*

(b) *no modelo do taxista.*

4.9. *Como é definida a relação "entre"?*

4.10. *Dados dois pontos* A *e* B*, existe um ponto* X *entre* A *e* B*? Existe um ponto* Y *tal que* B *está entre* A *e* Y*?*

4.11. *Se* X *está entre* A *e* B*, então* X *está entre* B *e* A*? Se* X *está entre* A *e* B*, então* A *está entre* B *e* X*?*

4.12. *O que é segmento? Como você definiria comprimento de segmento?*

4.13. *O que é triângulo?*

4.14. *Questão no modelo do taxista. Considere os pontos* $A = (0, 0)$*,* $B = (3, 0)$ *e* $C = (3, 3)$*. Sejam* r*,* s *e* t *as retas* AC*,* BC *e* AB*, respectivamente, e sejam* f_r*,* f_s *e* f *os seus sistemas de coordenadas. Os números* $f_r(C)$ *e* $f_s(C)$ *são iguais? Teriam que ser iguais? Tem sentido calcular* $f_r(B)$*? Calcule os comprimentos dos lados do triângulo* ABC *de duas maneiras: pela fórmula da distância e pela diferença das coordenadas.*

4.15. *Em um triângulo, qualquer lado é menor que a soma dos outros dois?*

Não! Surpreendente?

4.16. *Na definição da relação de ordem (*X *está entre* A *e* B*) foram colocadas duas condições: (1)* A*,* B *e* X *são colineares; (2)* $d(A, X) + d(X, B) = d(A, B)$*.*

Pergunta: na presença da condição 2, a condição 1 fica sendo supérflua e, portanto, pode ser dispensada?

4.17. *Como você definiria mediatriz de um segmento usando os conceitos introduzidos até agora?*

4.18. *Sendo* $P = (1, 0)$ *e* $Q = (0, 2)$*, represente numa figura a mediatriz do segmento PQ:*

(a) no modelo cartesiano;

(b) no modelo do taxista.

4.19. *Modelo, do taxista. Imagine o mapa de uma cidade em que as ruas são paralelas ao eixo Ox e as avenidas são paralelas ao eixo Oy. Suponha que existam dois pontos de táxi situados nos pontos* $A = (1, 0)$ *e* $B = (0, 1)$*, respectivamente. Admitindo que os táxis utilizem os itinerários mais curtos, demarque no mapa as localidades em que é indiferente ser atendido por um táxi a partir do ponto* A *ou do ponto* B*.*

4.4 Soluções da Lista de Exercícios . 4

4.1. *O axioma da régua é independente dos cinco primeiros axiomas?*

Resposta:
Sim. Para provar isto, basta exibir um modelo que satisfaz os cinco axiomas, mas não satisfaz o axioma da régua. Ora, no modelo com 4 pontos e 6 retas do item 9, do Roteiro 2, cada reta possui 2 pontos, logo não satisfaz o axioma da régua, pois este exige que cada reta tenha infinitos pontos.

4.2. *Como você prova que a reta é um conjunto infinito? E ilimitado? O que é "conjunto ilimitado"?*

Resposta:
Uma reta é um conjunto infinito porque tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$, pelo axioma da régua. Isto é, existe bijeção entre uma reta e $\mathbb{R}$.

"Infinito"e "ilimitado"são dois conceitos distintos. Por exemplo, o intervalo de números reais entre O e 1 é um conjunto infinito, mas é limitado. Um subconjunto C de $\mathbb{R}$ é limitado se existe um número $k > O$ tal que $|x| < k$, qualquer que seja x em C. É ilimitado se não for limitado.

A propriedade definidora de conjunto limitado é

$$\exists k > O \text{ tal que } |x| < k, \forall x \in C.$$

A sua negação, abaixo, é a propriedade definidora de conjunto ilimitado:

$$\exists k > O, \exists x \in C \text{ tal que } |x| < k.$$

O conjunto $\mathbb{R}$ é infinito e ilimitado. Por que $\mathbb{R}$ é ilimitado? Ora, dado $k > O$ qualquer, basta tomar $x = k + 1$ que se tem $|x| > k$.

Agora examinemos a reta r. Fixemos um ponto A na reta r. Por definição, dizer que r é um conjunto ilimitado é dizer que qualquer que seja o número real positivo k, existe um ponto X em r tal que $d(X, A) > k$. Como encontrar um ponto X em r tal que isto aconteça? Resposta: apelando para a bijeção $fr : r \to \mathbb{R}$. S$ejaa = f(A)$. Tomemos um número real x tal que $|x| > k$ (por exemplo, $x = a + k + 1$). Seja X um ponto de r tal que $x = fr(X)$. Então,

$$d(X, A) = |x - a| > k,$$

provando que r é um conjunto ilimitado. (Aqui, usamos a igualdade que associa d e f_r do axioma da régua.)

4.3. *Perguntas:*

(a) $d(A,B) = 0$*?*

(b) $d(A,B) = d(B,A)$*?*

(c) $A = Bimplicad(A,B) = 0$*?*

(d) $d(A,B) = 0$ *implica* $A = B$

Resposta:
Sim. Estas perguntas se referem à distância entre dois pontos introduzida no Axioma da Régua, que satisfaz a relação:

$$d(A,B) = |a - b|, \quad (*)$$

em que a e b são as coordenadas de A e B, conforme descritas no Roteiro 4. Da fórmula $(*)$ decorre imediatamente as 4 propriedades listadas nas perguntas.

4.4. *Seja r uma reta, e seja* f_r *uma sistema de coordenadas para* r*, associado a* d*. Se* g_r *é definida por* $g_r(X) = f_r(X) + k$*, sendo* k *uma constante, então* g_r *é também um sistema de coordenadas para* r*, associado à mesma distância* d*? E* $g_r(X) = kf_r(X)$*? A constante* k *pode ser negativa? Pode ser* 0*?*

Resposta:
Para mostrar que $g_r(X) = f_r(X) + k$ é injetora, sejam X_1 e X_2 tais que $g_r(X_1) = g_r(X_2)$. Então $f_r(X_1) + k = f_r(X_2) + k$, donde $f_r(X_1) = f_r(X_2)$. Como f_r é injetora, tem-se $X_1 = X_2$. Logo, g_r é injetora. Quanto à sobrejetividade, seja z um número real. Consideremos o número real $z - k$. Como f_r é sobrejetora, existe Z em r tal que $f_r(Z) = zk$. Temos $g_r(Z) = f_r(Z) + k = z - k + k = z$. Logo g_r, é sobrejetora. Portanto, g_r é bijetora, por ser injetora e sobrejetora. Resta mostrar que

$$d(A,B) = |g_r(A) - g_r(B)|.$$

Isto é um fato, pois

$$|g_r(A) - g_r(B)| = |f_r(A) + kf_r(B) - k| = |f_r(A) - f_r(B)| = d(A,B)$$

Observemos que esta demonstração não depende do valor da constante k. E a função $g_r(X) = kf_r(X)$? Se for $k = O$, teremos $g_r(X) = O$, para todo X, e gr não será bijetora. Se for $k \neq O$, pode-se provar que g_r é bijetora. Mas veja o que acontece com a igualdade que aparece no Axioma da Régua:

$$|g_r(A) - g_r(B)| = |kf_r(A) - kf_r(B)| = |k||f_r(A) - f_r(B)| = |k|d(A,B).$$

Sendo assim, para que g_r seja associada à mesma distância d, deveremos ter $|k| = 1$, donde $k = 1$ ou $k = -1$. Estes são, pois, os valores de k possíveis. No caso $k = 1$, temos $g_r = f_r$ e no caso $k = -1$, temos $g_r = -f_r$.

4.5. *Quais são as fórmulas para a distância e para as bijeções no modelo cartesiano?*

Resposta:
Veja o Roteiro 4.

4.6. *Quais são as fórmulas para a distância e para as bijeções no modelo do taxista?*

Resposta:
Veja o Roteiro 4.

4.7. *O que é circunferência?*

Resposta:
Veja o Roteiro 4.

4.8. *Faça uma figura representando a circunferência de centro (O, O) e raio 1:*

(a) no modelo cartesiano;

(b) no modelo do taxista.

Resposta:
Veja o Roteiro 4.

4.9. *Como é definida a relação "entre"?*

Resposta:
Veja o Roteiro 4.

4.10. *Dados dois pontos A e B, existe um ponto X entre A e B? Existe um ponto Y tal que B está entre A e Y?*

Resposta:
Sim. Seja r a reta AB e seja $f_r : r \to \mathbb{R}$ um sistema de coordenadas para r. Sejam $a = f_r(A)$, $b = f_r(B)$. Dados os números a e b, existe um número x entre a e b. Seja X um ponto da reta r tal que $x = f_r(X)$. Como x está entre a e b, tem-se que X está entre A e B (pela Proposição 4.2 do item ***Item 4.16.***).

Proposição –> Teorema?

16 do Roteiro 4). Analogamente, existe um número y tal que tal que b está entre a e y. Tomamos Y na reta r tal que $y = f_r(Y)$. Provamos a seguinte proposição:

Proposição 4.3. *Dados dois pontos A e B, sempre existe um ponto X entre A e B e um ponto Y tal que B está entre A e Y.*

Observe que esta proposição é precisamente o Axioma II_2, do livro Geometria Euclidiana Plana, de João Lucas Marques Barbosa. Pode uma afirmação que pode ser provada ser adotada como axioma? Observe também que o Axioma II_1 do mesmo livro também pode ser provada. Como explicar isto? Como se compara a maneira de introduzir a relação de ordem do livro do João Lucas com a do Roteiro 4?

4.11. *Se X está entre A e B, então X está entre B e A? Se X está entre A e B, então A está entre B e X?*

Resposta:
Seja r a reta AB e seja $f_r : r \to \mathbb{R}$ um sistema de coordenadas para r. Sejam $a = f_r(A)$, $x = f_r(X)$, $b = f_r(B)$. Já sabemos que X está entre A e B se e somente se x está entre a e b. Para os números reais, por definição, x está entre a e b se e somente se $a < x < b$ ou $b < x < a$. Com esta definição, fica claro que x está entre a e b se e somente se x está entre b e a. Logo, X está entre A e B se e somente se X está entre B e A.

Para os números reais, se $a < x < b$ ou $b < x < a$ não se pode ter $b < a < x$ ou $x < a < b$. Logo, se X está entre A e B não se pode ter A entre B e X.

4.12. *O que é segmento? Como você definiria comprimento de segmento?*

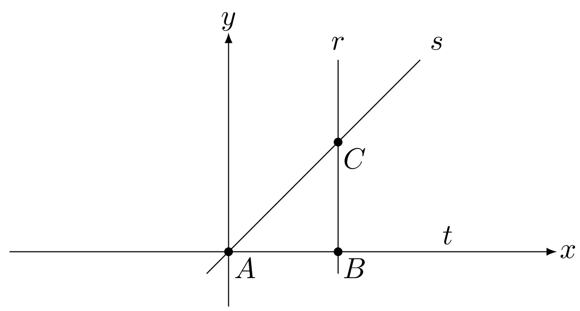
Resposta:
Veja o Roteiro 4.

4.13. *O que é triângulo?*

Resposta:
Veja o Roteiro 4.

4.14. *Questão no modelo do taxista. Considere os pontos $A = (0,0)$, $B = (3,0)$ e $C = (3,3)$. Sejam r, s e t as retas AC, BC e AB, respectivamente, e sejam f_r, f_s e f os seus sistemas de coordenadas. Os números $f_r(C)$ e $f_s(C)$ são iguais? Teriam que ser iguais? Tem sentido calcular $f_r(B)$? Calcule os comprimentos dos lados do triângulo ABC de duas maneiras: pela fórmula da distância e pela diferença das coordenadas.*

Resposta:



Usando as fórmulas para os sistemas de coordenadas no sistema cartesiano, dadas no Roteiro 4, obtém-se as seguintes expressões:

$$f_r(x,y) = x\sqrt{2}, \quad f_s(3,y) = y, \quad e \quad f_t(x,0) = x.$$

Usando essas expressões, obtemos:

$$f_r(C) = f_r(3,3) = 3\sqrt{2} \quad e \quad f_s(C) = f_s(3,3) = 3.$$

Portanto, $fr(C)$ é diferente de $fs(C)$. Estes valores não teriam que ser iguais. Os sistemas de coordenadas para retas distintas têm fórmulas distintas; logo a coordenada de C como ponto de r não tem que ser igual à coordenada de C quando considerado como ponto de s.

Não tem sentido calcular $fr(B)$, porque B não é um ponto de r.

Usando a fórmula da distância cartesiana, obtém-se $d(A,C) = \sqrt{18}$, $d(A,B) = 3$ e $d(B,C) = 3$. Agora, vamos calcular as mesmas distâncias, usando as diferenças de coordenadas.

Para calcular $d(A,C)$, usamos f_r para obter $f_r(A) = f_r(0,0) = 0$ e $f_r(C) = 3\sqrt{2}$. Daí

$$d(A,C) = |f_r(A) - f_r(C)1 = 10 - 3x\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$$

Para calcular $d(A,B)$, usamos f_t para obter $f_t(A) = f_t(0,0) = 0$ e $f_t(B) = 3$. Daí

$$d(A,B) = |f_t(A) - f_t(B)| = |0 - 3| = 3.$$

Para calcular d (B, C), usamos f_s para obter $f_s(B) = fs(3,0) = O$ e $f_s(3,3) = 3$. Daí

$$d(B,C) = |f_s(B) - f_s(C)| = |0 - 3| = 3.$$

4.15. *Em um triângulo, qualquer lado é menor que a soma dos outros dois?*

Não! Surpreendente?

Resposta:
Não. No modelo do taxista esta propriedade não é verdadeira. No triângulo desenhado no item 8 do Roteiro 4, o lado AB é igual à soma dos outros dois: $AB = AC + BC$.

4.16. *Na definição da relação de ordem (X está entre A e B) foram colocadas duas condições: (1) A, B e X são colineares; (2) $d(A,X) + d(X,B) = d(A,B)$.*

Pergunta: na presença da condição 2, a condição 1 fica sendo supérflua e, portanto, pode ser dispensada?

Resposta:
A condição 1 náo pode ser dispensada. Pode-se ter $AB = AC + CB$ sem que se tenha C entre A e B, como mostra a figura do item 8 do Roteiro 4.

4.17. *Como você definiria mediatriz de um segmento usando os conceitos introduzidos até agora?*

Resposta:
As propriedades conhecidas de mediatriz são: (a) perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio. (b) conjunto dos pontos eqüidistantes dos extremos do segmento. Adotamos esta última como propriedade definidora de mediatriz por ser mais geral e usar apenas o conceito de distância, que já temos. [Para o conceito de "perpendicular"precisaremos de "medida de ângulo".]

4.18. *Sendo $P = (1,0)$ e $Q = (0,2)$, represente numa figura a mediatriz do segmento PQ:*

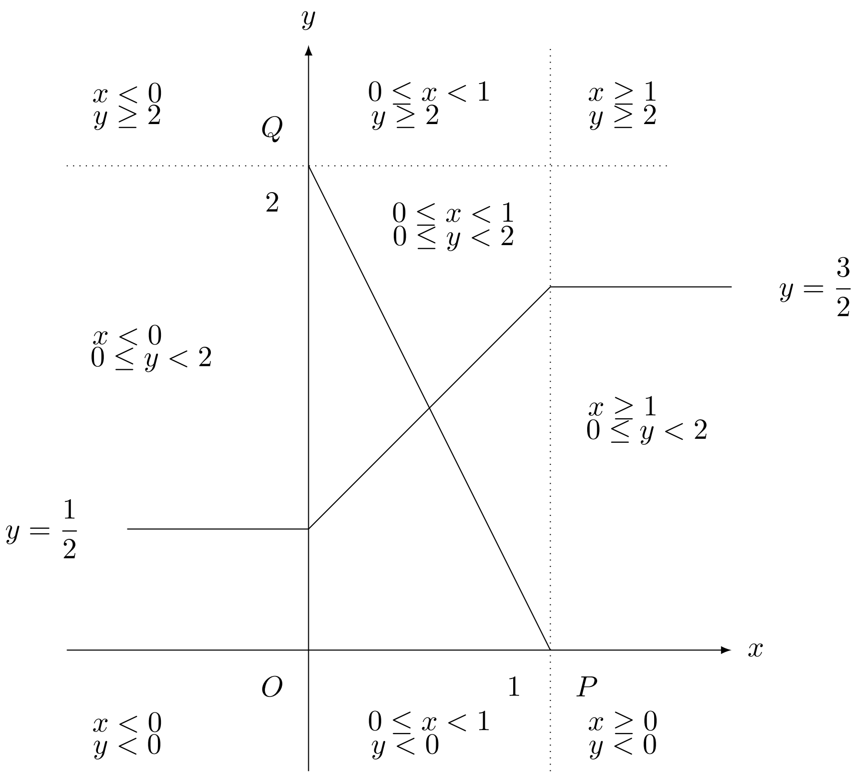
(a) no modelo cartesiano;

(b) no modelo do taxista.

Resposta:
Solução no modelo do taxista. Procuramos os pontos $X = (x,y)$ tais que $d_r(X,P) = d_T(X,Q)$. Ou seja, as coordenadas dos pontos X satisfazem a equação

$$|x-1| + |y-0| = |x-0| + |y-2| \quad \text{ou} \quad |x-1| + |y| = |x| + |y-2|. \quad (*)$$

Para se desvencilhar dos módulos, o que se faz com a definição de módulo de um número, teremos que decompor o plano em regiões delimitadas pelas retas $x-1=0$, $y=0$, $x=0$ e $y-2=0$. A figura abaixo mostra essas regiões.



(1) Na região $x > 1, y \ge 2$, temos $|x-1| = x-1$, $|y| = y$, $|x| = x$, $|y-2| = y-2$. A equação (*) torna-se

$$x - 1 + y = x + y - 2 \quad \text{ou} \quad 0x + 0y = -1$$

e não existe solução, já que qualquer que sejam x e y o primeiro membro é igual a 0.

(2) Na região $x > 1$, $0 \le y < 2$, a equação (*) toma-se

$$x - 1 + y = x - y + 2 \quad \text{ou} \quad 0x + 2y = 3, \quad y = 3/2$$

que é a equação de uma reta horizontal, restrita apenas à região em questão.

(3) Na região $0 \le x < 1$, $0 \le y < 2$, a equação $(*)$ toma-se

$$-x + 1 + y = x - y + 2 \quad \text{ou} \quad y = x + 1/2$$

que também é a equação de uma reta, restrita à região em questão.

(4) Você não terá dificuldade em verificar que na região $x < 0$, $0 \le y < 2$ tem-se a reta $y = 1/2$, e que nas outras regiões não há soluções.

A figura mostra a mediatriz do segmento PQ. Se isto não parece com a mediatriz que você conhece, não se preocupe; veremos coisas mais estranhas no futuro.

4.19. *Modelo, do taxista. Imagine o mapa de uma cidade em que as ruas são paralelas ao eixo Ox e as avenidas são paralelas ao eixo Oy. Suponha que existam dois pontos de táxi situados nos pontos $A = (1, 0)$ e $B = (0, 1)$, respectivamente. Admitindo que os táxis utilizem os itinerários mais curtos, demarque no mapa as localidades em que é indiferente ser atendido por um táxi a partir do ponto A ou do ponto B.*

Resposta:

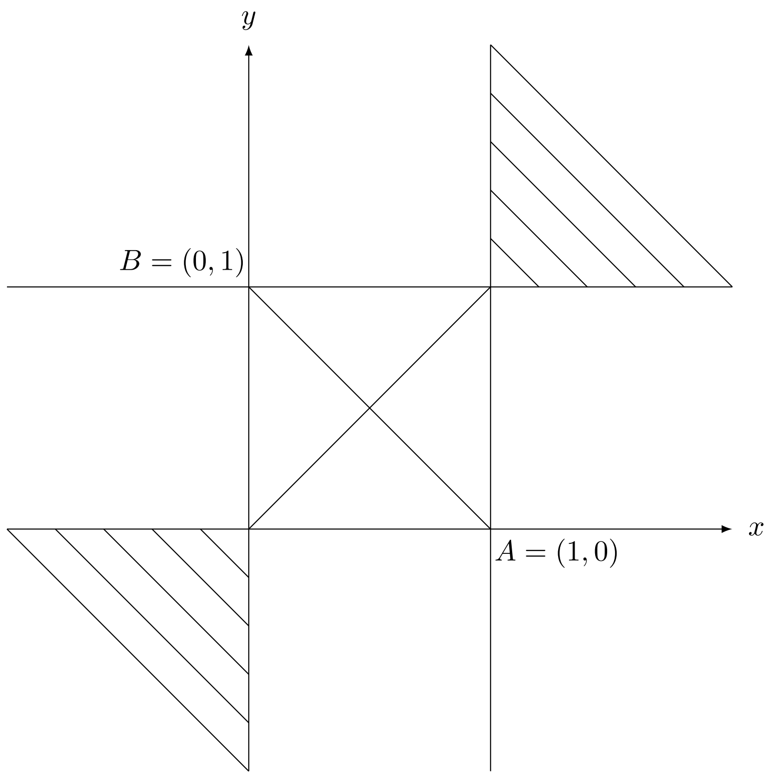
Procuramos o lugar dos pontos $P = (x, y)$ do plano do taxista tais que $dT(P, A) = (P, B)$, ou seja, a mediatriz do segmento AB. Veremos que esta mediatriz não é uma reta. Antes de começar a fazer as contas observe que os pontos P que estão na região indicada na figura são eqüidistantes de A e B. Isto significa que todos os pontos da região satisfazem a condição colocada no problema.

A equação procurada é dada por

$$|x - 1| + |y - 0| = |x - 0| + |y - 1|.$$

Agora, para descrever o gráfico desta equação, decomponha o plano em 9 regiões delimitadas pelas retas $x - 1 = 0$, $y = 0$, $x = O$ e $y - 1 = 0$. Você concluirá que o gráfico é o indicado na figura: as duas regiões hachuradas e o segmento que liga a origem ao ponto (1, 1). A conclusão é que qualquer ponto da região indicada é eqüidista;ite dos pontos de táxi A e B.

Portanto, a mediatriz do segmento AB é formada pelos pontos que estão no segmento que liga (O, O) a $(1, 1)$, mais os pontos que estão nas duas regiões hachuradas.


y
B = (0,1)
x
A = (1,0)

Capítulo 5

Axioma de Separação do Plano

5.1 Roteiro 5. Axioma de Separação do Plano {roteiro:5}

Conteúdo: Modelo bizarro. Semiplanos. Axioma de separação do plano. Interior de triângulo.

Item 5.1. Modelo bizarro. {item:5:1}
Já vimos dois modelos que satisfazem os 6 axiomas dados. Aqui está mais um modelo: o modelo bizarro. O que torna este modelo estranho é a maneira como está definida a bijeção para cada reta. Ele satisfaz os axiomas anteriores, mas, como veremos, não satisfaz o axioma de separação do plano, que será dado nesta Unidade. Como você verá, neste modelo, um triângulo não se parece com um triângulo.

Ponto: como no modelo cartesiano.
Reta: como no modelo cartesiano.
Logo, os cinco primeiros axiomas estão satisfeitos.
Para o Axioma da Régua, devemos dizer como é a distância e a bijeção para cada reta.
No modelo cartesiano e no do taxista, primeiro demos as fórmulas das distâncias e, depois, procuramos as fórmulas paras as bijeções que se ajustavam às distâncias. Aqui, começamos com as bijeções.

(a) para reta vertical r de equação $x = k$, fazemos

$$f_r(k, y) = y \quad \text{(como no modelo cartesiano).}$$

(b) para reta inclinada r, não-horizontal, de equação $y = mx + k$, fazemos

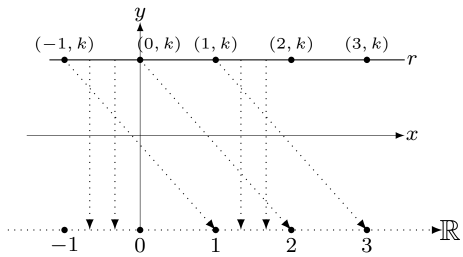
$$f_r(x, y) = x\sqrt{11 + m^2} \quad \text{(como no modelo cartesiano).}$$

(c) para reta horizontal r de equação $y = k$:

$$f_r(x, k) = x + 2, \quad \text{se } x \text{ é inteiro } k$$

$$f_r(x, k) = x, \quad \text{se } x \text{ é não-inteiro } k$$

A figura abaixo ilustra esta função.



As bijeções deste modelo diferem das do modelo cartesiano apenas para as retas horizontais. Vamos provar que as funções fr são de fato bijeções, no caso das retas horizontais:

1^o f_r é injetora. Se $f_r(x1, k) = f_r(x2, k)$, então temos os seguintes casos a considerar.

(a) $f_r(x_1, k)$ e $f_r(x_2, k)$ são inteiros; então x_1 e x_2 são inteiros e tem-se $x_1 + 2 = x_2 + 2$, donde $x_1 = x_2$ e $(x_1, k) = (x_2, k)$.

(b) $f_r(x_1, k)$ e $f_r(x_2, k)$ não são inteiros; então x_1 e x_2 não são inteiros e tem-se $x_1 = x_2$, donde $(x_1, k) = (x_2, k)$.

2^o f_r é sobrejetora. Seja z um número real. Se z é inteiro, tomamos o ponto $(z12, k)$. Temos $f_r(z - 2, k) = z - 2 + 2 = z$. Agora, se z não é inteiro, tomamos o ponto (z, k). Temos $f_r(z, k) = z$. Sendo, pois, f_r injetora e sobrejetora, é bijetora.

Não vamos deduzir aqui a fórmula específica para a distância bizarra dB. Colocaremos simplesmente que $d_B(A, B) = |f_r(A) - f_r(B)|$ para os pontos $A = (x_1, k)$ e $B = (x_2, k)$ da reta r. Convido os leitores para deduzir a expressão de d_B em função de x_1 e x_2. [Verifique se as fórmulas seguintes estão certas:

$$\begin{array}{rcll} d_B(A, B) & = & |x_1 - x_2|, & \text{se } x_1 \; e \; x_2 \text{ são ambos inteiros ou ambos não-inteiros;} \\ d_B(A, B) & = & |x_1 x_2 + 2| & \text{se } x_1 \text{ é inteiro e } x_2\text{é não-inteiro;} \\ d_B(A, B) & = & |x_1 - x_2 - 2|, & \text{se } x_1 \text{ é não-inteiro e } x_2\text{é inteiro]} \end{array}$$

{item:5:2} ***Item 5.2.*** Exemplo de segmentos no modelo bizarro. No caso das retas verticais e inclinadas, as bijeções no modelo bizarro são como no modelo cartesiano. Portanto, os segmentos nessas retas são como no modelo cartesiano. Para as retas horizontais, as bijeções são diferentes. Logo, se há diferenças entre os segmentos nos dois modelos, isto só pode acontecer com os segmentos horizontais.

Consideremos os pontos $A = (1, k)$, $B = (2, k)$ e $C = (2,5; k)$, na reta horizontal $y = k$. Exemplo de ponto entre dois pontos. É inacreditável, mas o ponto A está entre B e C. Como se mostra isto?

1ª maneira: usando sistema de coordenadas.

O sistema de coordenadas para a reta $y = k$ é:

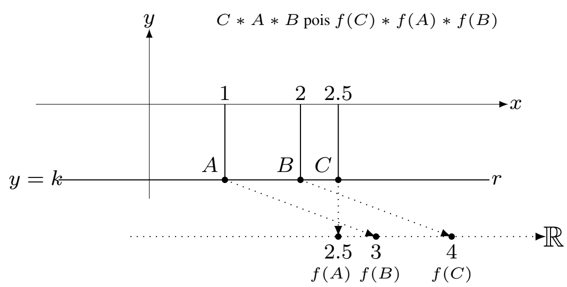
$$\begin{array}{lcll} f_r(x,k) & = & x+2, & \text{se } x \text{ é inteiro} \\ f_r(x,k) & = & x, & \text{se } x \text{ é não-inteiro.} \end{array}$$

Dispensaremos o índice r que aparece em f_r para tornar a notação mais simples. Pelo sistema de coordenadas f, as coordenadas dos pontos A, B e C são:

$$f(A) = 3, \quad f(B) = 4 \ \text{ e } f(C) = 2,5.$$

Portanto $f(C) < f(A) < f(B)$. Logo, pelo Teorema do item ***Item 4.17.*** do Roteiro 4, A está entre B e C. Surpreendente? Sim, pois não parece ser isto o que a figura abaixo está mostrando.

Item references produces punctuation after reference



2ª maneira: usando distância entre dois pontos.

De acordo com a propriedade definidora de ponto entre dois pontos, dada no item 14 do Roteiro 4, devemos mostrar que $d_B(B, A) + d_B(A, C) = d_B(B, C)$. Isto é o que acontece, pois

$$\begin{array}{lcccccc} d_B(C,B) & = & |f(C) - f(B)| & = & 4 - 2,5 & = & 1,5; \\ d_B(A,B) & = & f(A) - f(B)1 & = & 4 - 3 & = & 1 \text{ e} \\ d_B(C,A) & = & |f(C) - f(A)| & = & 3 - 2,5 & = & 0,5. \end{array}$$

Portanto, A está entre B e C. Você não acha dificil acreditar que $d_B(C, B) > d_B(C, A)$?

Exemplo de segmentos.

1. *Segmento* BC. Temos, por definição,

$$\text{seg}(BC) = \{B, C\} \cup \{X; B * X * C\}$$

Quais são os pontos X da reta BC tais que B *X*C?

Resposta: Pelo Teorema do item ***Item 4.17.***, do Roteiro 4,

$$B * X * C <=> f(B) * f(A) * f(C).$$

Isto equivale a se ter

$$f(C) < f(X) < f(B) \text{ ou } 2,5 < f(X) < 4.$$

Agora, não tem escapatória, temos que separar em dois casos.

(a) Para x inteiro, temos $f(X) = x + 2$, donde

$$2,5 < f(X) < 4 \;\Rightarrow\; 2,5 < x{+}2 < 4 \;\Rightarrow\; 2,5{-}2 < x < 4{-}2 \;\Rightarrow\; 0,5 < x < 2 \;\Rightarrow\; x = 1$$

Logo, $(1, k)$, ou seja, o ponto A, é o único ponto em que a abscissa é um número inteiro que está entre B e C.

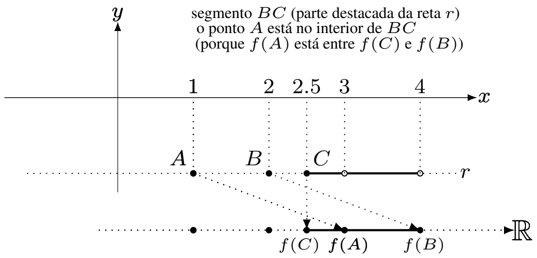
(b) Para x não-inteiro, temos $f(X) = x + 2$, donde

$$2,5 < f(X) < 4 \;\Rightarrow\; 2,5 < x < 4.$$

Juntando tudo, obtemos o segmento BC:

$$\text{seg}(BC)\{B, C\} \cup \{X\} = (x, -1/2); 2\,1/2 < x < 4, x \text{ não-inteiro}\} \cup \{A\},$$

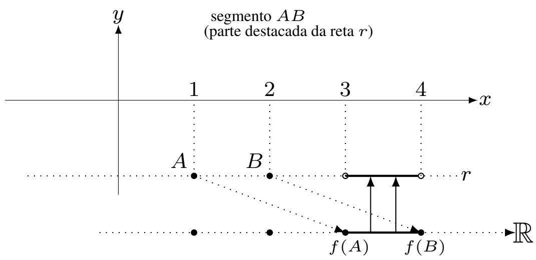
que está destacado na figura abaixo. Note que ós pontos $(3, k)$ e $(4, k)$ não estão no segmento BC. Mas os pontos da reta r de abscissas não-inteiras entre $2,5$ e 4 estão no segmento BC. O ponto A é um ponto do interior do segmento BC. Os pontos B e C são os extremos do segmento.



2. *Segmento* AB. De maneira análoga, obtemos

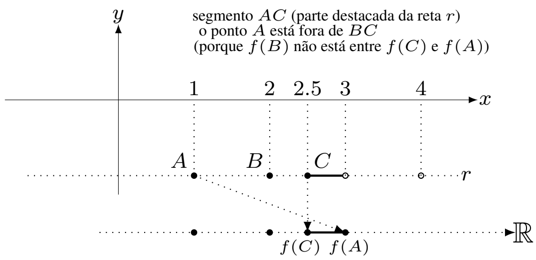
$$\text{seg}(AB) = \{A, B\} \cup \{\}X = (x, -1/2); 3 < x < 4\},$$

exibido na figura abaixo.



3. *Segmento* AC.

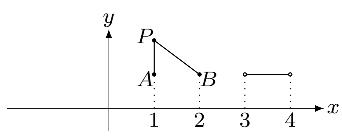
$$\text{seg}(AC) = \{A, C\} \cup \{X\} = (x-, 1/2); 2\ 1/2 < x < 3\}$$



Quais são os comprimentos desses segmentos? Por exemplo, o comprimento do segmento AC é $d_B(C, A) = |f(C) - f(A)| = 3 - 2,5 = 0,5$. Você acredita que o segmento BC é maior que o segmento AC?

Item 5.3. Triângulo no modelo bizarro. {item:5:3}

Sejam $A = (1, 1/2), B = (2, 1/2)$ e $P = (1, 1)$. Como estes pontos não são colineares, eles são vértices de um triângulo ABP, representado na figura abaixo. Os lados AP e BP são como no modelo cartesiano, mas o lado AB, que está numa reta horizontal, é diferente do segmento cartesiano.



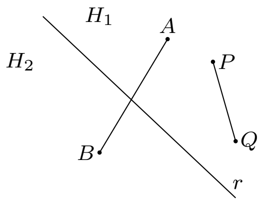
Item 5.4. Separação do plano por uma reta. {item:5:4}

Definição 5.1. *Dizemos que uma reta r separa o plano $\mathcal{P}$ se existem dois subconjuntos disjuntos H_1 e H_2 tais que*

(i) $H_1 \cup H_2 = \mathcal{P} - r$;

(ii) H_1 *e* H_2 *são convexos [*H_1 *convexo significa:* P *e* Q *em* H_1 *implica que* $\operatorname{seg}(PQ)$ *está contido em* H_1*];*

(iii) $A \in H_1$ *e* $B \in H_2$ *se somente se* $\operatorname{seg}(AB)$ *intercepta* r.



Os conjuntos H_1 e H_2 são denominados **semiplanos** determinados pela reta r. A reta r não está contida nos semiplanos. Se dois pontos estão no mesmo semiplano dizemos que estão **do mesmo lado** da reta r. Se estão em semiplanos distintos dizemos que estão em **lados opostos** de r.

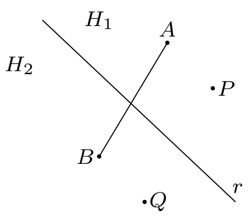
{item:5:5} ***Item 5.5.***

Teorema 5.1. ***Teorema Fundamental****. Seja r uma reta que* ***separa o plano****. Sejam A e B pontos que estão em lados opostos de r. Então*

(a) se P e A estão do mesmo lado de r, então P e B estão em lados opostos de r;

(b) se Q e A estão em lados opostos de r, então Q e B estão do mesmo lado de r.

Demonstração. Digamos que A está em H_1; então B está em H_2 (pois é isto o que significa dizer que A e B estão em lados opostos). Se P e A estão do mesmo lado de r, então P está em H_1; logo P e B estão em lados opostos de r. Isto prova (a). Agora, a hipótese em (b) implica que Q está em H_2; portanto Q e B estão do mesmo lado de r, provando (b). □



{item:5:6} ***Item 5.6.*** É possível provar que toda reta separa o plano?

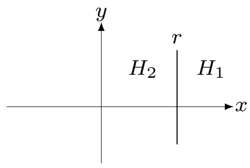
Não. Vamos examinar a questão nos modelos conhecidos.

Item 5.7. No modelo cartesiano, reta separa o plano. {item:5:7}

Consideremos primeiro uma reta vertical r de equação $x = k$. Devemos mostrar que existem dois subconjuntos H_1 e H_2 com as propriedades enunciadas no item 3. Definimos H_1 e H_2, como sendo o conjunto dos pontos à direita e a esquerda de r, respectivamente:

$$H_1 = \{(x, y); x > k\} \text{ e } H_2 = \{(x, y), x < k\}.$$

Assim sendo, $H_1 \cup H_2 = \mathbb{R}^2 - r$.

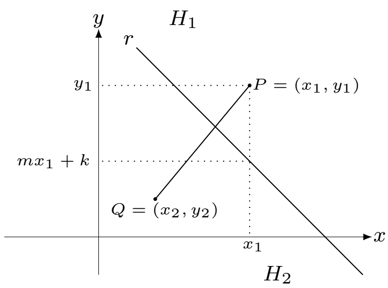


Sejam $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ pontos de H_1. Se for $x_1 = x_2$, então PQ é o segmento vertical constituído dos pontos (x_1, y), sendo $y_1 * y * y_2$. Logo, está contido em H_1. Digamos que $x_1 \neq x_2$. Então, além de P e Q, o segmento PQ é constituído, dos pontos $X = (x, y)$ da reta PQ tais que $x_1 * x * x_2$; portanto está contido em $H1$. O mesmo vale para $H2$.

Suponhamos agora que $P = (x_1, y_1) \in H_1$ e $Q = (x_2, y_2) \in H_2$. Então, $x_1 > kex_2 < k$, ou $x_2 < k < x_1$. Como os pontos $X = (x, y)$ da reta PQ tais que $x_2 < x < x_1$ estão no segmento PQ, então o ponto (k, y) desta reta está no segmento PQ. Logo, este segmento corta r.

Consideremos agora a reta r de equação $y = mx + k$. Definimos

$$H_1 = \{(x_1, y_1); y_1 > mx_1 + k\} \text{ e } H2 = \{(x_1, y_1); y_2 > mx_2 + k\}$$

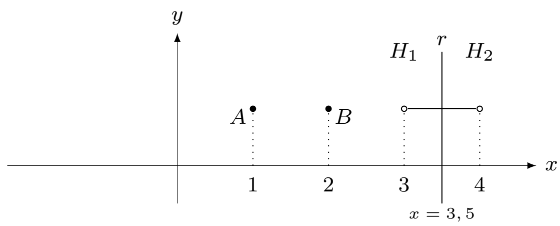


Usando geometria analitica, prova-se com certo trabalho que H_1 e H_2 satisfazem as propriedades de separação do plano.

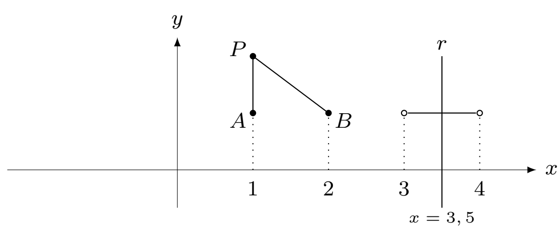
Item 5.8. No modelo bizarro, nem toda reta separa o plano. O que é sur- {item:5:8}
preendente nisto é que reta no modelo bizarro é a mesma coisa que no modelo cartesiano. Acontece que o conceito de separação do plano por uma reta, depende também do conceito de segmento, que pode ser diferente no modelo bizarro.

Consideremos a reta vertical r de equação $x = 3,5$. A figura abaixo é enganadora. Poderíamos pensar, como indica a figura abaixo, que H_1 e H_2 seriam os dois conjuntos exigidos na definição do item **??**:

$$H_1 = \{(x, y); x > 3,5\} \text{ e } H_2 = \{(x, y); x < 3,5\}$$



Uma propriedade que H_2 precisa ter é a de ser um conjunto convexo. Mas não é, pois os pontos $A = (1, 1/2)$ e $B = (2, 1/2)$ estão em H_2, por terem as suas abscissas menores que $3,5$ mas o segmento AB não está contido em H_2, pois corta r no ponto de abscissa $3,5$. Portanto, H_2 não é convexo. Isto significa que a reta r não separa o plano? Não! Significa apenas que os conjuntos H_1 e H_2 escolhidos não são adequados. Mas poderia haver outros conjuntos H_1 e H_2 que satisfizessem as propriedades de separação do plano. Para provar que r não separa o plano, temos de mostrar que não existem conjuntos H_1 e H_2 com as propriedades requeridas na definição do item 3.
Por absurdo, suponhamos que existem. (Não sabemos como H_1 e H_2 são, mas com certeza não são aqueles indicados na figura acima.) Como o segmento AB corta r, então A e B estão em lados opostos, digamos A em H_1 e B em H_2. Seja agora $P = (1, 1)$ (veja a figura abaixo). Como o segmento PA não corta r, P e A estão em H_1. Então, P e B estão em lados opostos e o segmento PB deveria cortar a reta r. Mas como se vê, não corta, uma contradição. Portanto, não existem H_1 e H_2 que satisfaçam as propriedades de separação do plano.



{item:5:9} ***Item 5.9.*** Conclusão da discussão anterior: os axiomas anteriores não garantem que qualquer reta separa o plano. Portanto; se queremos que isto aconteça, devemos declarar via axioma.

Item 5.10. {item:5:10}
{axiomasep} {axioma:separacao

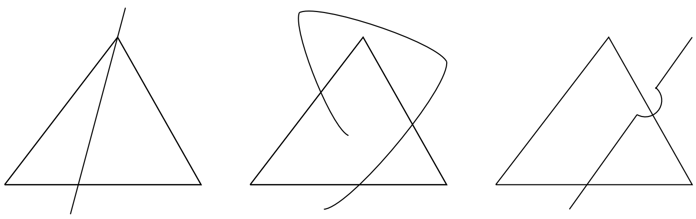
Axioma 8. ***Separação do plano.*** *Toda reta separa o plano.*

Item 5.11. O Axioma de separação do plano é independente dos demais? {item:5:11}

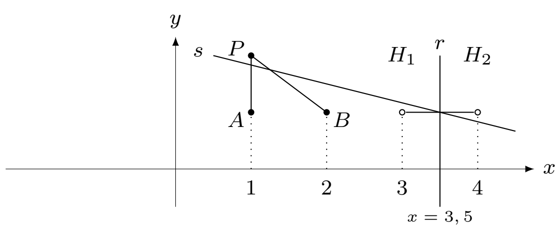
Sim, o modelo bizarro satisfaz todos os axiomas anteriores, mas não satisfaz o Axioma de separação do plano, como vimos no item 8.

Item 5.12. De que maneiras uma reta pode cortar um triângulo? {item:5:12}

Na figura abaixo, no triângulo à esquerda, a reta corta os três lados do triângulo, já que o vértice pertence aos dois lados. Pode uma reta cortar os três lados de um triângulo sem passar pelos vértices, como no triângulo do centro? Pode uma reta cortar um lado de um triângulo sem ser pelos vértices, e não cortar nenhum dos outros dois lados, como sugere o triângulo da direita?



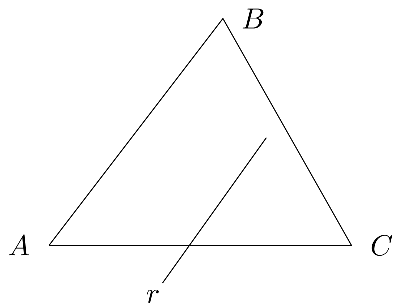
A figura abaixo, que mostra o triângulo APB desenhado no modelo bizarro, exibe as retas s e r, que respondem afirmativamente (impressionante?) às duas perguntas. Só que o modelo bizarro não satisfaz o Axioma de separação do plano. Se este axioma estiver presente, isto pode acontecer? Não! A demonstração deve ser feita em abstrato e, com certeza usa o Axioma de separação do plano. Se este fosse dispensável, os exemplos do modelo bizarro não existiriam.



Item 5.13. {item:5:13}

Proposição 5.2. *Se uma reta corta o interior de um lado de um triângulo sem passar pelos vértices, então ela terá que cortar um dos outros dois lados.*

(Aqui está uma proposição que parece tão óbvia que dificilmente se dá o devido valor à sua demonstração. A figura do item 12, desenhada no modelo bizarro, exibe um triângulo ABP e uma reta r que corta o lado AB, mas não corta nenhum dos outros dois lados. Este exemplo mostra que o Axioma de Separação do Plano é indispensável para a demonstração desta proposição.)



Demonstração. Por hipótese, r é uma reta que corta o lado AC do triângulo ABC, sem passar por A e nem por C. Queremos provar que r corta um dos outros dois lados do triângulo. Suponhamos que r não corta AB. Mostremos que r corta BC, para provar a tese.
Como o segmento AC corta r, sem passar por A ou C, A e C estão em lados opostos de r. Como AB não corta r, A e B estão do mesmo lado de r. Resulta então do teorema do item 5 que 13 e C estão em lados opostos de r. Isto implica que r corta o segmento BC, concluindo a demonstração da proposição.

□

{item:5:14} ***Item 5.14.*** A proposição que trata da possibilidade de uma reta cortar os três lados de um triângulo, sem passar pelos vértices, como a reta s da figura do item 12, é a seguinte, cuja demonstração é deixada para a lista de exercícios 05.

Proposição 5.3. *Uma reta não pode cortar os três lados de um triângulo sem passar pelos vértices.*

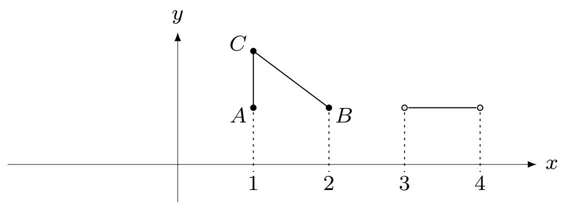
{item:5:15} ***Item 5.15.*** Interior de triângulo. Como vimos, o objeto triângulo pode ser definido sem o axioma de separação do plano, mas interior de triângulo não pode.

Definição 5.2. *Seja ABC um triângulo. Sejam H_{AB}^{C} o semiplano determinado pela reta AB e que contém o ponto C, H_{AC}^{B} o semiplano determinado pela reta AC e que contém o ponto B, e H_{BC}^{A} o semiplano determinado pela reta BC e* *que contém o ponto A. O **interior** do triângulo ABC é a interseção destes três semiplanos:*

$$H_{AB}^{C} \cap H_{AC}^{B} \cap H_{BC}^{A}.$$

Item 5.16. Tem sentido o conceito de interior de triângulo no modelo bizarro? {item:5:16}

Não. Porque o interior de triângulo é definido como a interseção de certos semiplanos, e nem sempre existe semiplano no modelo bizarro. A figura abaixo exibe um triângulo no modelo bizarro; o que seria o interior deste triângulo?



Item 5.17. O que é interior de circunferência? O objeto interior de circunferência não necessita do axioma de separação do plano. {item:5:17}

Definição 5.3. *O **interior** de uma circunferência de centro C e raio r é o conjunto dos pontos cuja distância ao centro é menor que o raio. O **exterior** é o conjunto dos pontos cuja distância ao centro é maior que o raio.*

Item 5.18. Tem sentido o conceito de interior de circunferência no modelo bizarro?: {item:5:18}

Sim. O conceito de interior de circunferência só depende de distância, diferentemente do conceito de interior de triângulo.

Item 5.19. Circunferência e interior de circunferência no modelo bizarro. *Uma circunferência no modelo bizarro não separa o interior do exterior: um segmento pode ligar um ponto do interior a um ponto do exterior sem cortar a circunferência.* {item:5:19}

Vamos desenhar a circunferência de centro $O = (0, 0)$ e raio $1, 5$. No modelo bizarro, a distância entre pontos que estão em retas que não sejam horizontais é a mesma que no modelo cartesiano. Então, os pontos das semicircunferências cartesianas que estão acima e abaixo do eixo Ox também fazem parte da circunferência bizarra. Resta determinar os pontos do eixo Ox que estão nessa circunferência. Estes são os pontos da forma $X = (x, 0)$ cuja distância ao centro $O = (0, 0)$ é $1, 5$:

$$d_B(X,O) = |f(X) - f(0)| = |f(x,0) - f(0,0)| = |f(x,0) - 2| = 1,5.$$

Aqui, f é a bijeção do eixo Ox em $\mathbb{R}$, o modelo bizarro. Para determinar x, separamos em dois casos:

Caso 1. x é inteiro. Então, $f(x,O) = x + 2$, e $|f(x,O) - 2| = k + 2 - 2 = |x|$. Logo,

$$|x| = 1,5 \;\Rightarrow\; x = \pm 1,5. \text{ Como } x \text{ deve ser inteiro, não há solução}$$

Caso 2. x é não-inteiro. Então, $f(x,0) = x$, e $|f(x,O) - 2| = |x - 2|$. Logo,

$$|x-2| = 1,5 \;\Rightarrow\; x - 2 = \pm 1,5 \;\Rightarrow\; x = 3,5 \text{ e } x = 0,5.$$

Portanto, são dois os pontos do eixo Ox que estão na circunferência bizarra: $A = (0,5;0)$ e $B = (3,5;0)$. Conclusão: a circunferência bizarra é constituída das duas semicircunferências cartesianas situadas acima e abaixo do eixo Ox, mais os pontos $A = (0,5;0)$ e $B = (3,5;0)$. A circunferência está destacada na figura abaixo, à esquerda.
Vamos determinar o interior da mesma circunferência.
Como a distância entre pontos que estão em retas que não sejam horizontais é a mesma que no modelo cartesiano, os pontos do interior da circunferência cartesiana que não estão no eixo Ox também estão no interior da circunferência bizarra.
Para determinar os pontos $X = (x,0)$ do eixo Ox cuja distância a $O = (0,0)$ é menor que $1,5$, devemos resolver a inequação:

$$|f(x,0) - 2| < 1,5$$

Separamos em dois casos:

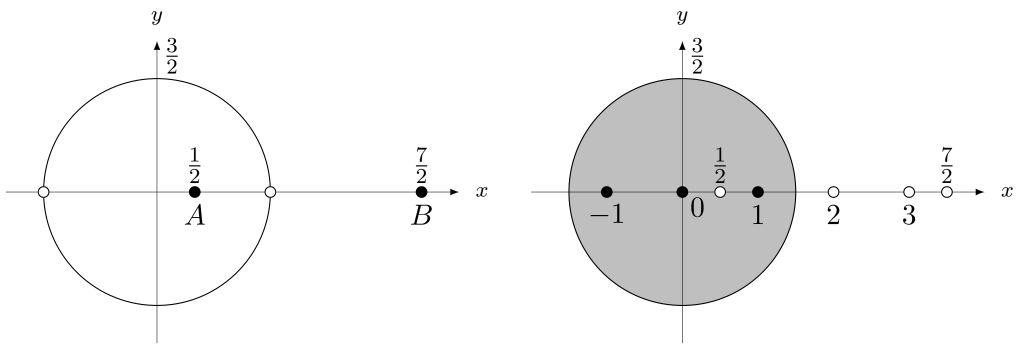
Caso 3. x é inteiro. Então, $f(x,O) = x + 2$, e $|f(x,O) - 2| = |x + 22| = |x|$. Logo,

$$|x| < 1,5 \;\Rightarrow\; 1,5 < x < 1,5. \text{ Como } x \text{ deve ser inteiro, as soluções são } x = -1,0,1.$$

Caso 4. x é não-inteiro. Então, $f(x,0) = x$, e $|f(x,O) - 2| = |x - 2|$. Logo,

$$|x-2| < 1,5 \;\Rightarrow\; -1,5 < x-2 < 1,5 \;\Rightarrow\; -1,5+2 < x-2+2 < 1,5+2 \;\Rightarrow\; 0,5 < x < 3,5.$$

A solução desta última inequação é constituída de todos os números reais entre $0,5$ e $3,5$, exceto os inteiros 1, 2 e 3. Portanto, os pontos do interior da circunferência bizarra que estão no eixo Ox têm as abscissas x encontradas nos casos 3 e 4. O interior está destacado na figura abaixo, à direita. Exemplos de ponto no interior da circunferência: $(-1,0), (-0,5;0,5), (0,5;0,5), (0,5;-0,5), (1,5;0), (2,5;0)$. Exemplos de ponto no exterior da circunferência: $(-1,5;0), (-0,5;0), (2,0), (2;-0,5), (3,5;1), (3,5;-1)$. Exemplos de ponto na circunferência: $(0,5;0), (3,5;0), (0;1,5)$. Encontre: (a) um segmento que liga um ponto do interior a um ponto do exterior sem cortar a circunferência; (b) um segmento que liga dois pontos do interior e que corta a circunferência; (c) um segmento que liga dois pontos no exterior e que corta a circunferência. Pergunta: adotando a definição de tangente a uma circunferência como sendo uma reta que corta a circunferência em apenas um ponto, você pode dizer que a reta que passa pelos pontos $(0;1,5)$ e $(1,5;0)$ é tangente à circunferência? Pode uma tangente passar pelo interior da circunferência?



5.2 Resumo

Objetos primitivos: *ponto* e *reta*.
Relação primitiva: [ponto] *pertence* a [reta] ("relação de incidência").
Relação definida: [ponto] está *entre* [dois pontos] ("relação de ordem").
Objetos definidos: *retas que se interceptam; retas paralelas; circunferência; triângulo, mediatriz de um segmento*.

Definition: Dizemos que uma reta r separa o plano $\mathcal{P}$ se existem dois subconjuntos disjuntos H_1 e H_2 tais que

(i) $H_1 \cup H_2 = \mathcal{P} - r$;

(ii) H_1 e H_2 são convexos [H_1 convexo significa: P e Q em H_1 implica que $\mathrm{seg}(PQ)$ está contido em H_1];

(iii) $A \in H_1$ e $B \in H_2$ se somente se $\mathrm{seg}(AB)$ intercepta r.

Os conjuntos H_1 e H_2 são denominados **semiplanos determinados pela reta** r. Se A e B estão em um mesmo semiplano dizemos que **estão de um mesmo lado** da reta r; se A está em H_1 e B está em H_2 dizemos que **estão em lados opostos** de r.

Axioma de separação do plano. Toda reta separa o plano.

Teorema 5.4. ***Teorema Fundamental.*** *Seja r uma reta que separa o plano. Sejam A e B pontos que estão em lados opostos de r. Então*

(a) se P e A estão do mesmo lado de r, então P e B estão em lados opostos de r;

(b) se Q e A estão em lados opostos de r, então Q e B estão do mesmo lado de r.

Teorema 5.5. ***Teorema A.*** *Se uma reta corta um lado de um triângulo sem passar pelos vértices, então ela terá que cortar um dos outros dois lados.*

Teorema 5.6. ***Teorema B.*** *Uma reta não pode cortar os três lados de um triângulo sem passar pelos vértices.*

Definição. Seja ABC um triângulo. Sejam H_{AB}^{C} o semiplano determinado pela reta AB e que contém o ponto C, H_{AC}^{B} o semiplano determinado pela reta AC e que contém o ponto B, e H_{BC}^{A} o semiplano determinado pela reta BC e que contém o ponto A. O **interior** do triângulo ABC é a interseção destes três semiplanos:

$$H_{AB}^{C} \cap H_{AC}^{B} \cap H_{BC}^{A}.$$

Um ponto está no **exterior** se não está no triângulo ou no seu interior.

5.3 Lista de Exercícios n. 5

A não ser que esteja explícito em contrário no enunciado do exercício, consideram-se em vigor todos os sete axiomas.

5.1. *O axiomá de separação do plano é independente dos seis primeiros axiomas?*

5.2. *Descreva o modelo bizarro. O modelo bizarro satisfaz o axioma de separação do plano?*

5.3. *Os modelos cartesiano e do taxista satisfazem o axioma de separação do plano?*

5.4. *No modelo bizarro. desenhe a circunferência de centro na origem e raio* 1. *Desenhe os seus diâmetros horizontal e vertical. O centro está no interior da circunferência. Os pontos* $(0.5; O)$ *e* $(1,5; 0)$ *estão no interior da circunferência? Pode um segmento ligar um ponto do interior a um ponto do exterior sem cortar a circunferência?*

5.5. *Questões no modelo bizarro. Desenhe um triângulo tendo um lado maior que a soma dos outros dois. Pode um lado ser menor que a soma dos outros dois? Pode um lado ser igual à soma dos outros dois?*

5.6. *No modelo bizarro, pode uma reta cortar só um lado de um triângulo?*

5.7. *Estando valendo todos os axiomas, pode uma reta cortar só um lado de um triângulo?*

5.8. *No modelo bizarro, pode uma reta cortar os três lados de um triângulo, sem passar pelos vértices?*

5.9. *Estando valendo todos os axiomas, pode uma reta cortar os três lados de um triângulo, sem passar pelos vértices?*

5.10. *Defina interior de triângulo. E exterior.*

5.11. *Tem sentido a definição de interior de triângulo no modelo bizarro?*

5.12. *Qual é a hierarquia dos conceitos usados na definição de interior de circunferência? E de interior de triângulo?*

5.13. *Demonstre o teorema fundamental.*

5.4 Soluções da Lista de Exercícios n. 5

5.1. *O axioma da régua é independente dos cinco primeiros axiomas?*

Resposta:
Sim. Para provar isto, basta exibir um modelo que satisfaz os cinco axiomas, mas não satisfaz o axioma da régua. Ora, no modelo com 4 pontos e 6 retas do item 9, do Roteiro 2, cada reta possui 2 pontos, logo não satisfaz o axioma da régua, pois este exige que cada reta tenha infinitos pontos.

5.2. *Como você prova que a reta é um conjunto infinito? E ilimitado? O que é "conjunto ilimitado"?*

Resposta:
Uma reta é um conjunto infinito porque tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$, pelo axioma da régua. Isto é, existe bijeção entre uma reta e $\mathbb{R}$.

"Infinito"e "ilimitado"são dois conceitos distintos. Por exemplo, o intervalo de números reais entre O e 1 é um conjunto infinito, mas é limitado. Um subconjunto C de $\mathbb{R}$ é limitado se existe um número $k > O$ tal que $|x| < k$, qualquer que seja x em C. É ilimitado se não for limitado.

A propriedade definidora de conjunto limitado é

$$\exists k > O \text{ tal que } |x| < k, \forall x \in C.$$

A sua negação, abaixo, é a propriedade definidora de conjunto ilimitado:

$$\exists k > O, \exists x \in C \text{ tal que } |x| < k.$$

O conjunto $\mathbb{R}$ é infinito e ilimitado. Por que $\mathbb{R}$ é ilimitado? Ora, dado $k > O$ qualquer, basta tomar $x = k + 1$ que se tem $|x| > k$.

Agora examinemos a reta r. Fixemos um ponto A na reta r. Por definição, dizer que r é um conjunto ilimitado é dizer que qualquer que seja o número real positivo k, existe um ponto X em r tal que $d(X, A) > k$. Como encontrar um ponto X em r tal que isto aconteça? Resposta: apelando para a bijeção $fr : r \to \mathbb{R}$. S$ejaa = f(A)$. Tomemos um número real x tal que $|x| > k$ (por exemplo, $x = a + k + 1$). Seja X um ponto de r tal que $x = fr(X)$. Então,

$$d(X, A) = |x - a| > k,$$

provando que r é um conjunto ilimitado. (Aqui, usamos a igualdade que associa d e f_r do axioma da régua.)

5.3. *Perguntas:*

(a) $d(A,B) = 0$*?*

(b) $d(A,B) = d(B,A)$*?*

(c) $A = Bimplicad(A,B) = 0$*?*

(d) $d(A,B) = 0$ *implica* $A = B$

Resposta:

Sim. Estas perguntas se referem à distância entre dois pontos introduzida no Axioma da Régua, que satisfaz a relação:

$$d(A,B) = |a - b|, \quad (*)$$

em que a e b são as coordenadas de A e B, conforme descritas no Roteiro 4. Da fórmula $(*)$ decorre imediatamente as 4 propriedades listadas nas perguntas.

5.4. *Seja r uma reta, e seja* f_r *uma sistema de coordenadas para* r*, associado a* d*. Se* g_r *é definida por* $g_r(X) = f_r(X) + k$*, sendo* k *uma constante, então* g_r *é também um sistema de coordenadas para* r*, associado à mesma distância* d*? E* $g_r(X) = kf_r(X)$*? A constante* k *pode ser negativa? Pode ser* 0*?*

Resposta:

Para mostrar que $g_r(X) = f_r(X) + k$ é injetora, sejam X_1 e X_2 tais que $g_r(X_1) = g_r(X_2)$. Então $f_r(X_1) + k = f_r(X_2) + k$, donde $f_r(X_1) = f_r(X_2)$. Como f_r é injetora, tem-se $X_1 = X_2$. Logo, g_r é injetora. Quanto à sobrejetividade, seja z um número real. Consideremos o número real $z - k$. Como f_r é sobrejetora, existe Z em r tal que $f_r(Z) = zk$. Temos $g_r(Z) = f_r(Z) + k = z - k + k = z$. Logo g_r, é sobrejetora. Portanto, g_r é bijetora, por ser injetora e sobrejetora. Resta mostrar que

$$d(A,B) = |g_r(A) - g_r(B)|.$$

Isto é um fato, pois

$$|g_r(A) - g_r(B)| = |f_r(A) + kf_r(B) - k| = |f_r(A) - f_r(B)| = d(A,B)$$

Observemos que esta demonstração não depende do valor da constante k. E a função $g_r(X) = kf_r(X)$? Se for $k = O$, teremos $g_r(X) = O$, para todo X, e gr não será bijetora. Se for $k \neq O$, pode-se provar que g_r é bijetora. Mas veja o que acontece com a igualdade que aparece no Axioma da Régua:

$$|g_r(A) - g_r(B)| = |kf_r(A) - kf_r(B)| = |k||f_r(A) - f_r(B)| = |k|d(A,B).$$

Sendo assim, para que g_r seja associada à mesma distância d, deveremos ter $|k| = 1$, donde $k = 1$ ou $k = -1$. Estes são, pois, os valores de k possíveis. No caso $k = 1$, temos $g_r = f_r$ e no caso $k = -1$, temos $g_r = -f_r$.

5.5. *Quais são as fórmulas para a distância e para as bijeções no modelo cartesiano?*

Resposta:
Veja o Roteiro 4.

5.6. *Quais são as fórmulas para a distância e para as bijeções no modelo do taxista?*

Resposta:
Veja o Roteiro 4.

5.7. *O que é circunferência?*

Resposta:
Veja o Roteiro 4.

5.8. *Faça uma figura representando a circunferência de centro (O, O) e raio 1:*

(a) no modelo cartesiano;

(b) no modelo do taxista.

Resposta:
Veja o Roteiro 4.

5.9. *Como é definida a relação "entre"?*

Resposta:
Veja o Roteiro 4.

5.10. *Dados dois pontos A e B, existe um ponto X entre A e B? Existe um ponto Y tal que B está entre A e Y?*

Resposta:
Sim. Seja r a reta AB e seja $f_r : r \to \mathbb{R}$ um sistema de coordenadas para r. Sejam $a = f_r(A)$, $b = f_r(B)$. Dados os números a e b, existe um número x entre a e b. Seja X um ponto da reta r tal que $x = f_r(X)$. Como x está entre a e b, tem-se que X está entre A e B (pela Proposição 4.2 do item ***Item 4.16.***). Proposição –> Teorema?

16 do Roteiro 4). Analogamente, existe um número y tal que tal que b está entre a e y. Tomamos Y na reta r tal que $y = f_r(Y)$. Provamos a seguinte proposição:

Proposição 5.7. *Dados dois pontos A e B, sempre existe um ponto X entre A e B e um ponto Y tal que B está entre A e Y.*

Observe que esta proposição é precisamente o Axioma II_2, do livro Geometria Euclidiana Plana, de João Lucas Marques Barbosa. Pode uma afirmação que pode ser provada ser adotada como axioma? Observe também que o Axioma II_1 do mesmo livro também pode ser provada. Como explicar isto? Como se compara a maneira de introduzir a relação de ordem do livro do João Lucas com a do Roteiro 4?

5.11. *Se X está entre A e B, então X está entre B e A? Se X está entre A e B, então A está entre B e X?*

Resposta:
Seja r a reta AB e seja $f_r : r \to \mathbb{R}$ um sistema de coordenadas para r. Sejam $a = f_r(A)$, $x = f_r(X)$, $b = f_r(B)$. Já sabemos que X está entre A e B se e somente se x está entre a e b. Para os números reais, por definição, x está entre a e b se e somente se $a < x < b$ ou $b < x < a$. Com esta definição, fica claro que x está entre a e b se e somente se x está entre b e a. Logo, X está entre A e B se e somente se X está entre B e A.

Para os números reais, se $a < x < b$ ou $b < x < a$ não se pode ter $b < a < x$ ou $x < a < b$. Logo, se X está entre A e B não se pode ter A entre B e X.

5.12. *O que é segmento? Como você definiria comprimento de segmento?*

Resposta:
Veja o Roteiro 4.

5.13. *O que é triângulo?*

Resposta:
Veja o Roteiro 4.

Capítulo 6

Medida de ângulo

{roteiro:6}

6.1 Roteiro 6A. Medida de ângulo

{roteiro:61}

Conteúdo: semirreta, ângulo, interior de ângulo, medida de ângulo, axioma do transferidor, modelo de Moulton, retas perpendiculares, perpendicular a uma reta dada por um ponto da reta e por um ponto fora da reta, distância de um ponto a uma reta, retas eqüidistantes. Retas paralelas são eqüidistantes?

Item 6A.1. O que é ângulo? {item:61:1}

Definição 6.1. *Ângulo é o conjunto formado pelos pontos que estão em duas semi-retas de mesma origem: sendo A, B e C não colineares,*

$$B\widehat{A}C = S_{AB} \cup S_{AC}.$$

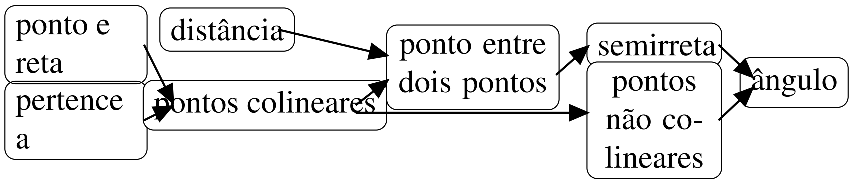
O ponto A é o vértice do ângulo, as semi-retas S_{AB} e S_{AC} são os lados do ângulo. Para a definição de ângulo precisamos antes da definição de semi-reta.

Definição 6.2. *A semi-reta de origem A que passa por B é o conjunto*

$$S_{AB} = seg(AB) \cup \{X; A * B * X\}$$

Item 6A.2. Para a definição de ângulo é necessário o axioma de separação do plano? {item:61:2}

Não. Na definição de ângulo usa-se o conceito de semi-reta, cuja existência depende do Axioma da régua, mas não do axioma de separação do plano. Abaixo, está a hierarquia dos conceitos utilizados no conceito de ângulo.



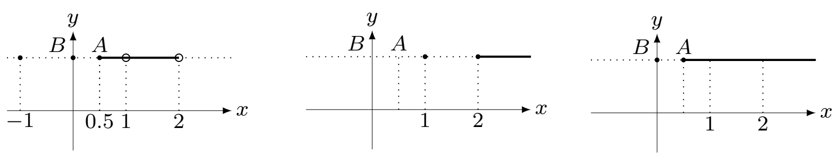
{item:61:3} ***Item 6A.3.*** Exemplo de ângulo no modelo bizarro.

Antes, representaremos graficamente a semi-reta de origem $A = (0,5;1)$ que passa pelo ponto $B = (0,1)$. Estes pontos estão na reta horizontal r de equação $y = 1$, para a qual uma bijeção é dada por $f_r(x,1) = x$, se x não é inteiro e $f_r(x,1) = x + 2$, se x é inteiro.
Temos $f_r(A) = f_r(0,5;1) = 0,5$ e $f_r(B) = f_r(O,1) = 2$. Os pontos $X = (x,1)$ tais que $A * X * B$ devem satisfazer a condição $0,5 < f_r(x,1) < 2$.

(a) No caso em que x não é inteiro, deveremos ter $0,5 < x < 2$, o que inclui todos os números entre $0,5$ e 2, exceto o inteiro 1.

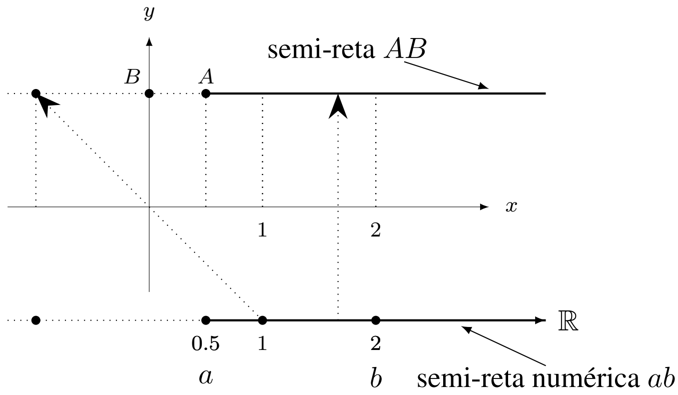
(b) No caso em que x é inteiro, deveremos ter $0,5 < x + 2 < 2$ ou $0,5 < x < O$ o que dá $x = -1$. Os pontos $X = (x,1)$ são os pontos de r cujas abscissas são estas.

Juntando a estes pontos, os pontos A e B temos o segmento AB, destacado na figura abaixo, à esquerda, que é parte da semi-reta S.
Resta agora, para completar a semi-reta, representar o conjunto $\{X; A * B * X\}$. Deveremos ter $0,5 < 2 < fr(x,1)$, cuja solução exige a análise de dois casos. Para x não inteiro, temos $0,5 < 2 < x$, o que dá todos os números não inteiros maiores que 2. Para x inteiro temos $0,5 < 2 < x + 2$, o que dá todos os números inteiros maiores que 0. Os pontos X de r correspondentes estão representados no gráfico do meio, na figura abaixo. A semi-reta completa, que reúne os dois conjuntos, está representada à direita.

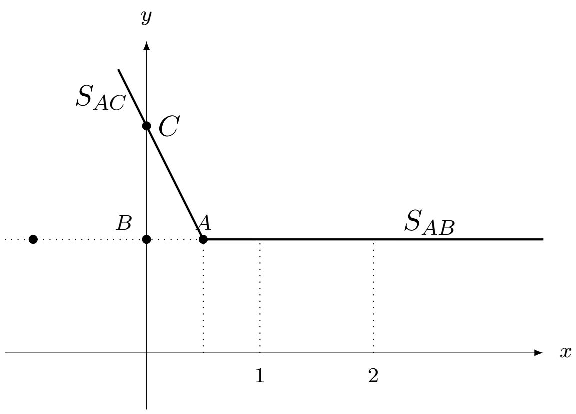


segmento AB conjunto $\{X;\ A * B * X\}$ semi-reta AB

Outra maneira de desenhar a semi-reta: desenhe a semi-reta numérica ab e represente a imagem inversa desta semi-reta numérica na reta AB pela bijeção f_r.

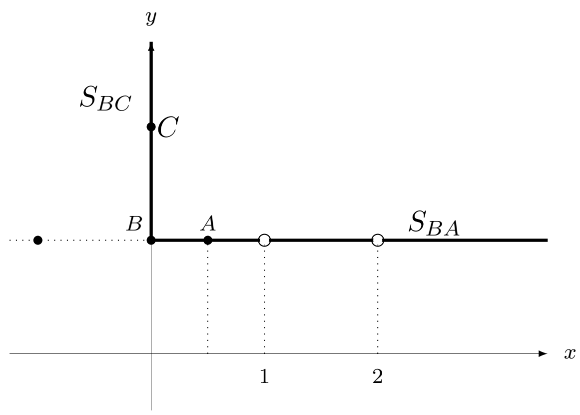


Agora tomamos o ponto $C-(0,2)$. A figura abaixo representa o ângulo $B\widehat{A}C$. O lado AB deste ângulo é a semi-reta já representada acima. O lado AC é o mesmo que a semi-reta cartesiana S_{AC}, pois AC não é horizontal.



ângulo $B\widehat{A}C$, com vértice em A

Como outro exemplo de ângulo, representamos na figura abaixo o ângulo $A\widehat{B}C$. O seu lado horizontal é a semirreta S_{BA}. Esta tem em comum com a semirreta S_{BA}, desenhada acima, o segmento bizarro AB.

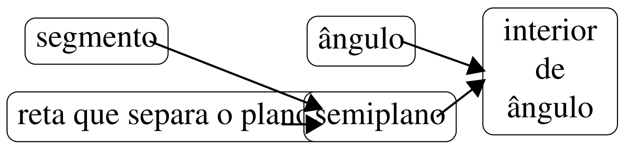


ângulo $A\widehat{B}C$, com vértice em B

{item:61:4} ***Item 6A.4.*** O que é interior de ângulo?

Definição 6.3. *O interior do ângulo $B\widehat{A}C$ é a interseção dos semi-planos H_{AB}^{C} e H_{AC}^{B}. Com a notação H_{AB}^{C} entendemos o semi-plano determinado pela reta AB e o ponto C.*

Hierarquia dos conceitos envolvidos no conceito de interior de ângulo:



{item:61:5} ***Item 6A.5.*** Tem sentido o conceito de interior de ângulo no modelo bizarro?

Observemos que o conceito de interior de ângulo depende do conceito de semi-plano, que depende do axioma de separação do plano. Logo, não tem sentido interior de ângulo no modelo bizarro, pois o axioma de separação do plano não vale neste modelo.

{item:61:6} ***Item 6A.6.*** O que é medida de ângulo?

Definição 6.4. *Uma medida de ângulo em graus é uma função m que a cada ângulo a faz corresponder um número $m(a)$, com as seguintes propriedades:*

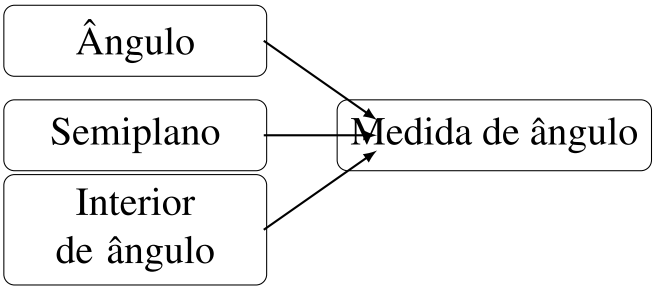
(i) $0 < m(a) < 180$*;*

(ii) dada uma semi-reta SAB, seja H um dos semi-planos determinados pela reta AB; então, dado um número a entre 0 e 180, existe exatamente uma semi-reta SAC, sendo $C \in H$, tal que $m(B\widehat{A}C) = a$;

(iii) se M está no interior do ângulo $\angle B\widehat{A}C$ *, então*

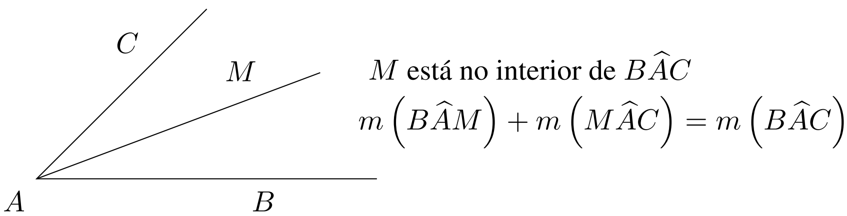
$$m(B\widehat{A}M) + m(M\widehat{A}C) = m(B\widehat{A}C).$$

Hierarquia dos conceitos utilizados para o conceito de medida de ângulo:



A propriedade (ii) é útil para mostrar que é possível construir, sobre uma semi-reta S_{AB}, um ângulo com uma dada medida a. Toma-se um dos semi-planos H determinados pela reta AB e toma-se S_{AC} tal que $m(B\widehat{A}C) = a$, garantida por aquela propriedade (figura abaixo).

A figura seguinte ilustra a propriedade (iii).



Item 6A.7. Para a definição de medida de ângulo é necessário o axioma de separação do plano? {item:61:7}

Sim. Observe o uso de semiplano e de interior de ângulo na definição de medida de ângulo, conceitos que dependem do axioma de separação do plano.

Item 6A.8. {item:61:8} {axioma:transferid

Axioma 9. ***Axioma do transferidor.*** *Existe medida de ângulo.*

Item 6A.9. Como se mede ângulo no modelo cartesiano? {item:61:9}

Resposta: da maneira como se faz em geometria analítica. Sejam $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$ e $C = (x_2, y_2)$. A medida do ângulo $B\widehat{A}C$ é obtida usando o produto escalar de dois vetores no plano. O produto escalar dos vetores

$$\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) \text{ e } \overrightarrow{AC} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0)$$

é o número

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (x_1 - x_0) \cdot (x_2 - x_0) + (y_1 - y_0) \cdot (y_2 - y_0).$$

Por definição, no modelo cartesiano, a medida do $\angle BAC$ é o número 0, entre 0 e 180, cujo cosseno satisfaz a relação

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \cos\theta$$

sendo $|\overrightarrow{AB}|$ o comprimento do vetor $\overrightarrow{AB}$. Esta maneira de medir ângulo satisfaz as três condições requeridas na definição de medida de ângulo.

{item:61:10} ***Item 6A.10.*** Como se mede ângulos no modelo do taxista?

Por definição, *a medida de ângulo no modelo do taxista é como no modelo cartesiano*.

{item:61:11} ***Item 6A.11.*** Tem sentido medida de ângulo no modelo bizarro?

Não, pois para a definição de medida de ângulo é preciso estar valendo o axionia de separação do plano, o que não acontece no modelo bizarro.

{item:61:12} ***Item 6A.12.*** Um novo modelo: **o modelo de Moulton**.

No modelo de Moulton, um ponto é como no modelo cartesiano; retas verticais (x = constante), retas horizontais e inclinadas com declividade negativa ($y = mx + k$, com $m \leq 0$), também são como no modelo cartesiano.
Já as retas de declividade positiva são substituídas por "retas quebradas", ou seja, quando $m > 0$, uma reta é dada por uma equação da form

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}mx + k, & \text{se } x \geq 0, \\ mx + k, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

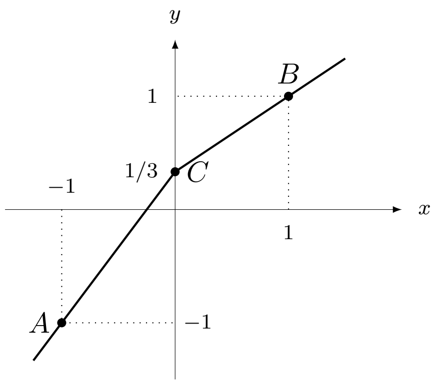
{item:61:13} ***Item 6A.13.*** Exemplo de reta de Moulton.

Determinemos a reta de Moulton que passa pelos pontos $A = (-1, -1)$ e $B = (1, 1)$. Neste caso, a declividade m é positiva. Para determinar m e k substituímos as coordenadas de A e B nas equações $y = mx + k$ e $y = (1/2)mx + k$, respectivamente, por ser a abcissa de A negativa e a de B positiva. Obtemos

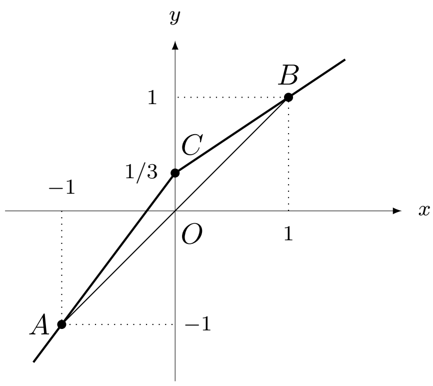
$$-1 = m + k \text{ e } 1 = (1/2)m + k.$$

A solução deste sistema é $m = 4/3$ e $k = 1/3$. A equação da reta de Moulton que passa por A e B é portanto

$$y(413)x + 1/3, \text{ se } x < 0 \text{ e } y = (2/3)x + 1/3, \text{ se } x \geq 0.$$



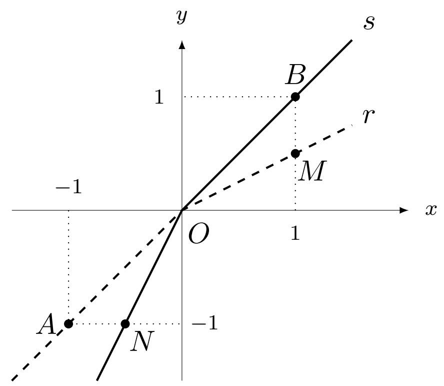
Item 6A.14. Pergunta: no modelo de Moulton, você está vendo um triângulo na figura abaixo? Os pontos $A = (-1, -1)$, $B = (1, 1)$ e $C = (O, 1/3)$ são os mesmos da figura anterior. {item:61:14}



Você está vendo, mas talvez não seja o que você está pensando. Os vértices do triângulo são A, O e B. Você não está pensando que A, C e B são vértices de um triângulo de Moulton, não? Claro que não, pois. eles são colineares. Já os pontos A, O e B não são colineares. O ponto O não pertence à reta de Moulton ACB. Ou, de outra forma, o ponto B não está na reta AO. Não se esqueça que esta reta se quebra, reduzindo a sua declividade à metade da parte que está à esquerda do eixo Oy. A reta AO passa pelo ponto $M = (1, 1/2)$. A reta que passa por A

e O é a reta r que está tracejada na figura abaixo. A reta BO passa pelo ponto $N = (-0,5; -1)$. A equação da reta de Moulton AO é

$$y = \begin{cases} y = x, & \text{se } x < 0 \\ y = (1/2)x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



A, O, M estão em r, N, O, B estão em s

{item:61:15} ***Item 6A.15.*** O modelo de Moulton satisfaz os axiomas anteriores?

Sim. Axiomas de incidência. O leitor não terá dificuldades em mostrar que o modelo de Moulton satisfaz os axiomas de incidência. A parte mais trabalhosa é provar que dois pontos A e B determinam uma reta de Moulton. No caso em que a reta cartesiana determinada por A e B tem declividade negativa ou zero, ou é vertical, ela coincicre com a reta de Moulton e não há nada mais o que fazer. Quando a declividade da reta cartesiana é positiva, para provar que existe e é única a reta de Moulton que passa por A e B, é preciso considerar separadamente os três casos: (a) os dois pontos estão à esquerda do eixo Oy; (b) os dois pontos estão à direita do eixo Oy; (c) um ponto está à esquerda e o outro está à direita do eixo Oy.

Detalhemos o caso em que: $P = (x_1, y_1)$ está à esquerda e $Q = (x_2, y_2)$ está à direita do eixo Oy, respectivamente, ou seja, $x_1 < 0 < x_2$ e $y_1 < y_2$. A equação da reta PQ é da forma

$$y = mx + k, \text{ se } x < 0 \qquad (1)$$

$$y = (m/2)x + k, \text{ se } x \geq 0 \quad (2)$$

sendo que as coordenadas de P satisfazem a equação (1) e as de Q satisfazem a equação (2).

Precisamos determinar m e k (em termos de x_1, y_1, x_2 e y_2, que são dados). Para ísto, resolvemos o sistema, cujas incógnitas são m e k:

$$y_1 = mx_1 + k$$
$$y_2 = (m/2)x_2 + k$$

Obtemos $m = 2(y_2 - y_1)/(x_2 - 2x_1)$ e $k = (x_2y_1 - 2x_1y_2)/(x_2 - 2x_1)$, e a reta fica conhecida.
Axiomas de paralelismo. Não há dificuldades. Faça algumas figuras, para perceber.
Axioma da régua. Para provar que o modelo de Moulton satisfaz o Axioma da régua, introduzimos agora uma função distância d_M e um sistema de coordenadas f_r para cada reta de Moulton r. A função distância d_M é definida de maneira muito natural a partir da distância cartesiana d. Por exemplo, para determinar a distância $d_M(A, B)$ entre os pontos A e B dados no item 10, acima, somamos o comprimento cartesiano do segmento que vai de A ao ponto C em que a reta corta o eixo Oy, com o comprimento cartesiano do segmento que vai deste ponto ao ponto B.
Definimos, pois, a distância d_M da seguinte maneira. Para pontos que estão em retas verticais ou de declividade negativa ou zero, a distância d_M coincide com a distância cartesiana d_c. Os sistemas de coordenadas de Moulton para essas retas são os mesmos que os cartesianos. Agora, para pontos A e B em retas de Moulton com declividade positiva, seja C o ponto onde a reta corta o eixo Oy. Definimos:

$$d_M(A, B) = dc(A, B), \text{ se } A \text{ e } B \text{ estão do mesmo lado de } Oy;$$

$$d_M(A, B) = d_c(A, C) + d_c(C, B), \text{ se } A \text{ e } B \text{ estão em lados opostos de } Oy,$$

sendo C o ponto onde ela corta este eixo.
Para essas retas, definimos um sistema de coordenadas f em duas partes, gerido em cada uma delas como no modelo cartesiano:

$$f(x, y) = x\sqrt{1 + m^2}, \text{ se } x < 0$$

$$f(x, y) = x\sqrt{1 + m^2/4}, \text{ se } x \geq 0$$

É fácil verificar que dm efsatisfazem as condições do Axioma da régua.
Axioma de separação do plano. Resta mostrar que o modelo de Moulton satisfaz o axioma de separação do plano: que para cada reta r existem dois conjuntos H_1 e H_2 satisfazendo as condições da separação do plano por uma reta. No caso em

que r é também uma reta cartesiana, os conjuntos H_1 e H_2 são como no modelo cartesiano e não há dificuldades.

Concentremos, pois, a atenção no caso de uma reta r de declividade m positiva, de equação: $y = mx + k$, se $x < 0$ e $y(1/2)mx + k$, se $x \geq$. Sejam A, C e B pontos de r, sendo C a sua interseção com o eixo Oy, A à esquerda e B à direita de Oy. Definimos H_1 e H_2 como sendo as partes "acima"e "abaixo"da reta, respectivamente (veja a figura); mais precisamente, H_1 é a reunião de dois conjuntos A_1 e B_1, sendo

$$A_1 = \{(x, y);\ x < 0 \text{ e } y > mx + k\},$$
$$B_1 = \{(x, y);\ x \geq 0 \text{ e } y > (1/2)mx + k\};$$

enquanto H_2 é a reunião de A_2 e B_2, sendo

$$A_2 = \{(x, y);\ x < 0 \text{ e } y < mx + k\},$$
$$B_2 = \{(x, y);\ x \geq 0 \text{ e } y < (1/2)mx + k\}.$$

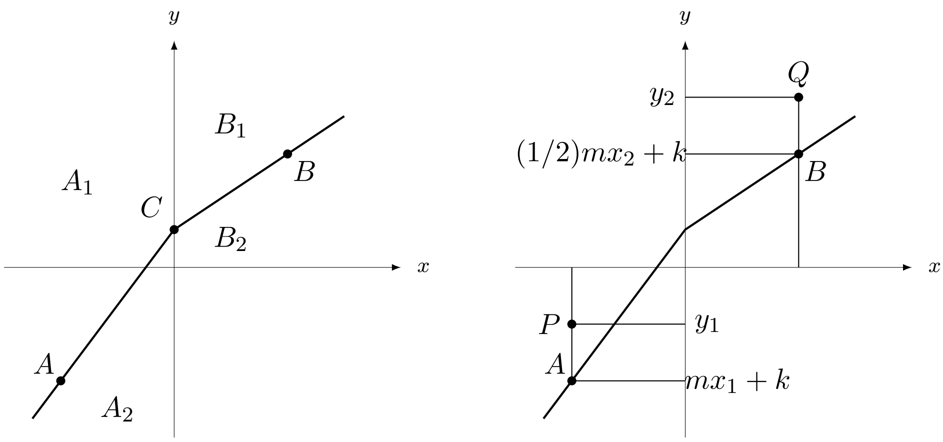


Fig a direita está em correspondência com o texto?

Seja $y = m_1x + k_1$, x < 0, $y = (m_1/2)x + k_1$, $x > 0$ a equação da reta PQ. Basta mostrar que o ponto $(0, k_1)$ em que a reta PQ corta o eixo Oy está acima do ponto $(0, k)$, em que a reta r corta aquele eixo, ou seja, que $k_1 > k$.

Pelo que vimos acima, na verificação dos axiomas de incidência, $k_1(x_2y_1 - 2x_1y_2)/(x_2 - 2x_1)$. Como se prova que $k_1 > k$? O numerador de k_1 tem duas parcelas x_2y_1 e $(-2x_1y_2)$. Temos

$$x_2y_1 > x_2(mx_1 + k), \text{ porque } y_1 > mx_1 + k$$

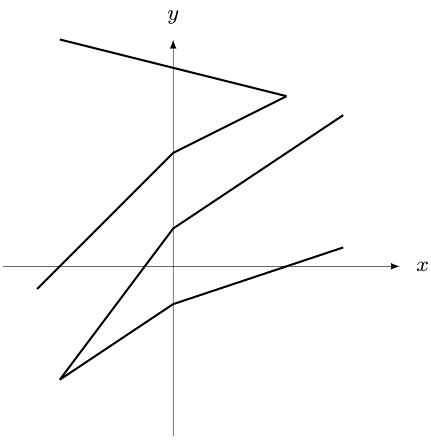
$$-2x_1y_2 > (-2x_1)((m/2)x_2k), \text{ porque } y_2 > (m/2)x_2 + k$$

Somando membro a membro as duas desigualdades acima obtemos

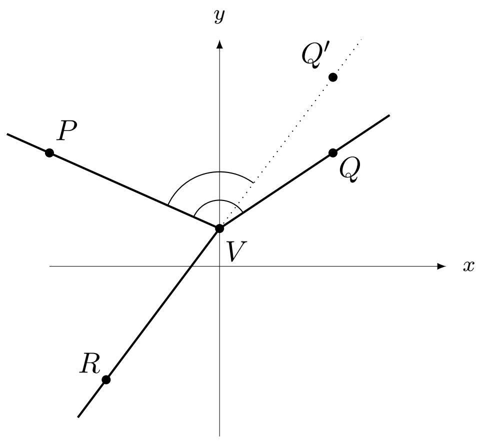
$$x_2y_1 - 2x_1y_2 > (x_2 - 2x_1)k$$

Desta última, observando que $x_2 - 2x_1 > 0$, obtemos $k < (x_2 - 2x_1)k/(x_2 - 2x_1) = k_1$, provando o que se queria.
O restante dos detalhes para completar a demonstração de que o modelo de Moulton satisfaz o axioma de separação do plano deixamos para o leitor.

Item 6A.16. Medida de ângulo no modelo de Moulton. {item:61:16}



Os vértices destes ângulos estão fora
do eixo Oy. Mede-se como no modelo cartesiano.



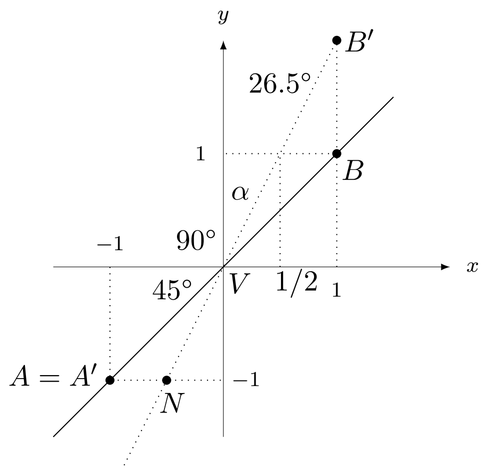
O vértice V deste ângulo está no do eixo Oy.
$m_M(P\widehat{V}Q) = m_C(P\widehat{V}Q')$

Para se medir um ângulo de Moulton AVB, mede-se um ângulo cartesiano $A\widehat{V}B$. que se constrói a partir de $A'\widehat{V}B'$ da maneira descrita abaixo. A medida de Moulton, $m_M(A\widehat{V}B)$, de um ângulo de Moulton $A\widehat{V}B$, de vértice V, é a medida cartesiana, $m_c(A'\widehat{V}B')$, de um outro ângulo cartesiano $A'\widehat{V}B'$: $m_M(A\widehat{V}B) = m_c(A'\widehat{V}B')$. O ângulo $A'\widehat{V}B'$ é obtido a partir do ângulo AVB segundo as regras descritas abaixo.
Caso 1. O vértice V do ângulo $A\widehat{V}B$ está fora do eixo Oy. Neste caso, tomam-se os pontos A' e B' nos lados S_{VA} e S_{VB}, respectivamente, do mesmo lado do eixo Oy em que está o ponto V.
Caso 2. O vértice V do ângulo $A\widehat{V}B$ está no eixo Oy.

(a) Quando um lado do ângulo, digamos S_{VA}, está à esquerda do eixo Oy, toma-se A' em S_{VA}, independentemente da sua declividade.

(b) Quando o lado do ângulo, digamos S_{VA}, está do lado direito do eixo Oy, temos duas situações a considerar. Se ele for horizontal ou tiver declividade negativa, toma-se A' em S_{VA}. Se ele tiver declividade positiva, toma-se A' no prolongamento cartesiano, para a direita do eixo Oy, da parte da reta AV que está do lado esquerdo do eixo Oy.

Exemplo. Na figura abaixo, está representado o ângulo de Moulton AVB, sendo $V = (0, 0)$, $A = (-1, -1)$ e $B = (1, 1)$. Queremos determinar a sua medida $m_M(AVB)$.



O lado S_{VA} está à esquerda de Oy; tomamos $A' = A$. O lado S_{VB} está à direita de Oy e tem declividade positiva. A parte da reta de Moulton VB que está a esquerda do eixo Oy é S_{VN}; tomamos B' no prolongamento cartesiano de S_{VN} para a direita do eixo Oy. Na figura, tomamos $B' = (1, 2)$. Basta agora medir o ângulo cartesiano $A'VB'$. Tem-se $mc(A'VB') = 45°+90°+26,5°= 161,5°$, aproximadamente, pois $26,5°$é uma medida aproximada do ângulo a indicado na figura. (A tangente deste ângulo a é A', razão do cateto oposto para o cateto adjacente de um triângulo retângulo que o leitor pode identificar facilmente na figura.) Portanto, $m_M(AVB) = m_c(A'VB') = 161,5°$(aproximadamente).

{item:61:17} ***Item 6A.17.*** Agora que sabemos medir ângulo, podemos falar em retas perpendiculares.

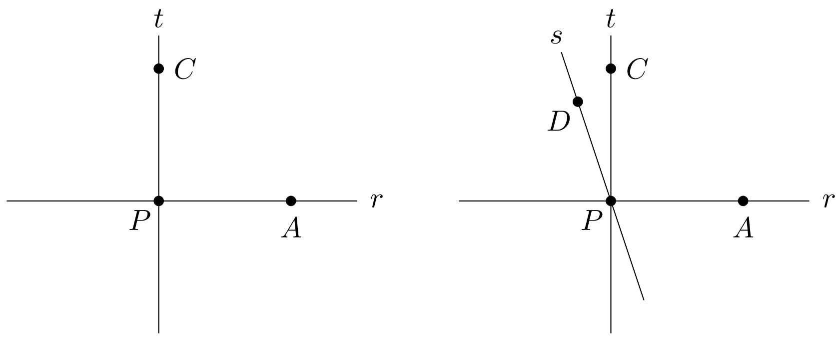
Definição 6.5. *Duas retas r e s são perpendiculares se a união de r e s contém um ângulo reto.*

Observe que não dissemos que as retas formam um ângulo reto, pois ângulo é formado por semi-retas. Na verdade são formados quatro ângulos retos.

{item:61:18} ***Item 6A.18.*** Perpendicular a uma reta r por um ponto P da reta.

Teorema 6.1. *Teorema A. Se P é uni ponto de uma reta dada r, então existe uma e uma só perpendicular à reta r passando por P.*

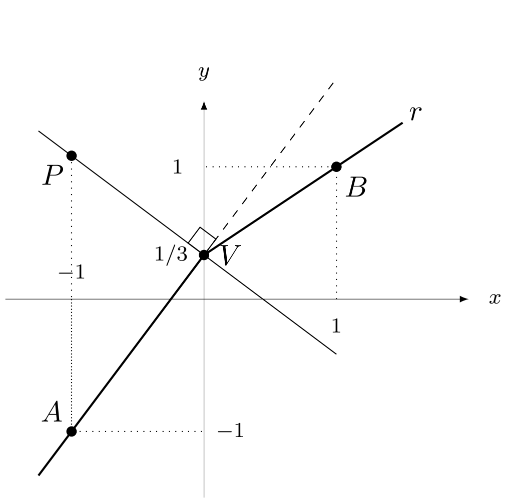
Demonstração. Aplicaremos a propriedade (ii) da definição de medida de ângulo. Seja S_{PA}, sendo A um ponto de r, uma semi-reta. Seja C um ponto de um dos semiplanos H determinados por r (axioma de separação do plano) tal que $m(CPA) = 90$. Isto é possível porque o número 90 está entre 0 e 180. Como o ângulo CPA é reto, a reta t determinada por C e P é perpendicular à reta r. Isto prova a existência de perpendicular. Para provar a unicidade, seja s uma reta perpendicular a r, passando por P. Seja D um ponto de s situado em H. Então o ângulo ADP é reto. Logo, a semi-reta S_{PD} coincide com a semi-reta S_{PC}, pela unicidade de semi-reta enunciada na propriedade (ii) da definição de medida de ângulo. □

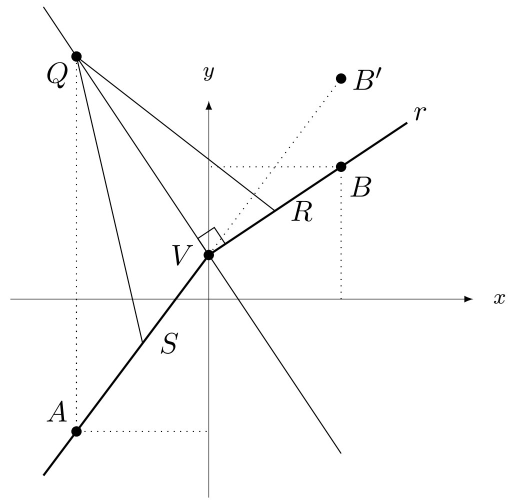


Item 6A.19. Perpendicular a uma reta r por um ponto P fora da reta r. Agora é diferente: não vale nem a existência nem a unicidade. {item:61:19}

Com os axiomas atuais não se pode garantir existência nem unicidade. Daremos exemplos e contra-exemplos.

Como reta r, consideremos a reta quebrada AVB dada no item 13: $A = (-1, -1)$, $V = (0, 1/3)$, $B = (1, 1)$ e para ponto tomamos $P = (-1, 13/12)$. O ponto P está na reta cartesiana $y = -(3/4)x + 1/3$ que é perpendicular à reta cartesiana $y = (4/3)x + 1/3$ no ponto V (esta equação é a equação da reta de Moulton r, para $x \leq 0$). Temos $m_M(AVP) = m_c(AVP) = 90°$, pois os lados do ângulo estão à esquerda do eixo Oy. Portanto, a reta PC é perpendicular à reta r, tanto segundo Moulton quanto no modelo cartesiano. Este é um exemplo de um ponto P pelo qual passa uma e uma só perpendicular a r.





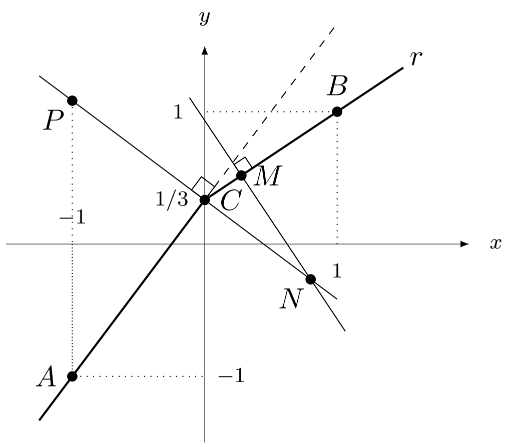
Agora exibiremos um ponto Q pelo qual não passa perpendicular a r. Tomemos a reta QV perpendicular cartesianamente à reta y = (2/3)x + 1/3 (esta é a equação da reta de Moulton r, para x > 0). A equação de QV é y = (-3/2)x + 1/3, sendo Q o ponto desta reta de abscissa -1: Q = (-1, 11/6). Portanto, o ângulo cartesiano BVQ é reto.

O ângulo de Moulton BVQ é reto? Resposta: Não.

Para medir este ângulo, devemos substituir o lado VB pela semi-reta VB' que é o prolongamento, à direita do eixo Oy, de AV, a parte de r que está à esquerda de Oy. Tomamos $B' = (1, 5/3)$. Então, $mM(BCQ) = mc(B'CQ)$. Como se vê claramente, este último ângulo é agudo (menor que 90°). Portanto QV não é perpendicular a r, segundo Moulton.

Pergunta: Pelo ponto Q, existe uma reta perpendicular a r? Resposta: Não. Como acabamos de ver, QV não é perpendicular a r, segundo Moulton (como vimos, QV é perpendicular a VB, cartesianamente falando). Agora, se ligarmos Q a um ponto R de r, á direita de V, como mostra a figura, QR não é perpendicular a CB cartesianamente (porque só existe uma perpendicular cartesiana a VB e esta é QV). A medida de Moulton do ângulo BRQ é a mesma medida cartesiana deste ângulo, logo não é reto. Consegue-se mostrar também que, se ligarmos Q a um ponto S de r, à esquerda de V, QS não é perpendicular a r. Conclusão: não existe perpendicular a r pelo ponto Q. Este é um fato surpreendente.

E quanto à unicidade? Por um ponto fora de r pode passar mais de uma perpendicular a r? Resposta: Sim. Vamos exibir um ponto N pelo qual passam duas perpendiculares a r. Tomamos N um ponto do quarto quadrante que está na reta PV que, como vimos é perpendicular a r. Por N traçamos urna perpendicular cartesiana MN à reta r, sendo M um ponto à direita de C. Esta reta MN é perpendicular a r, segundo Moulton também. Portanto, no modelo de Moulton, existem duas perpendiculares a r por N: NC e NM. Outro fato surpreendente.



Conclusão. Os axiomas dados até agora não são suficientes para garantir a existência e a unicidade de reta perpendicular a uma reta dada por um ponto dado fora da reta. Ao contrário, no caso de ponto na reta, existência e unicidade de perpendicular estão garantidas, como mostra o Teorema A do item 18. Que axioma está faltando para garantir-existência e unicidade de perpendicular a uma reta por um ponto fora? Veremos isto no futuro.

Item 6A.20. Como se define distância de um ponto a uma reta? {item:61:20}

Como se sabe, na geometria euclidiana, determina-se a distância de um ponto a uma reta baixando-se uma perpendicular do ponto à reta e calculando-se a distância do ponto ao pé da perpendicular. Acontece que, na presença dos axiomas atuais, nem sempre a perpendicular existe, como vimos no exemplo do item anterior. Por esta razão definimos distância de um ponto a uma reta de outra maneira:

Definição 6.6. *Seja r uma reta e seja P um ponto fora de r. A distância de P a r, indicada por $d(P, r)$, é a menor das distâncias de P aos pontos de r. Em símbolos:*

$$d(P, r) = min\{d(P, X); X \in r\}.$$

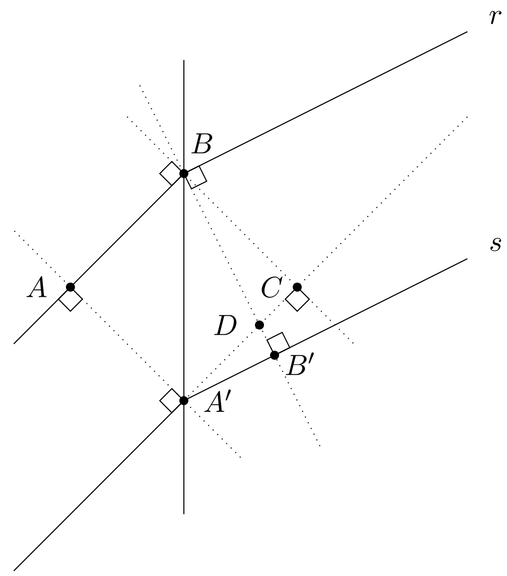
Item 6A.21. Que são retas eqüidistantes? {item:61:21}

Definição 6.7. *A reta r é eqüidistante da reta s se dados dois pontos quaisquer A e B de r, tem-se $d(A, s) = d(B, s)$.*

Item 6A.22. Retas paralelas são eqüidistantes? {item:61:22}

Nem sempre. No modelo de Moulton existem retas paralelas que não são eqüidistantes.

Exemplo. Na figura abaixo, as retas r e s são retas de Moulton paralelas. Tomamos em r o ponto A de modo que o pé A' da perpendicular de A a r é o ponto de olho interseção de s com Oy. O ponto B é a interseção de r com o eixo Oy; B' é o pé da perpendicular baixada de B a s. O segmento $A'C$ está no prolongamento cartesiano da air semi-reta que está à esquerda de Ou. O segmento BC é paralelo a AA' e, portanto, tem comprimento igual a AA'. A hipotenusa do triângulo retângulo BCD é parte do segmento BB'. Disto decorre que $BB' > BD > BC = AA'$. Logo, $BB' > AA'$. Portanto, a reta r não é eqüidistante de s, por ter dois pontos A e B cujas distâncias a s são diferentes.



6.2 Roteiro 6B. Conseqüências dos axiomas de separação do plano e do transferidor

Título muito comprido no cabeçaiho das páginas . {62}

Os teoremas que decorrem do axioma de separação do plano são de fácil aceitação e de dificil demonstração. O matemático Moritz Pasch (1843-1930) foi um dos primeiros matemáticos a perceber que eles precisavam de demonstração e, para demonstrá-los, aos axiomas de Euclides ele percebeu que era necessário acrescentar um novo axioma, o de separação do plano. Neste Roteiro, enunciamos e provamos alguns deles. Nenhum dos teoremas depende dos axiomas de paralelismo. Todos os teoremas dependem do axioma de separação do plano, exceto a Proposição B, que depende apenas do axioma da régua (e dos axiomas de incidência).

Os teoremas tratam com interiores de figuras, cujas definições relembramos abaixo:

Definições O **interior de um segmento** AB é constituído dos pontos do segmento diferentes dos extremos:

$$\text{int}(\text{seg}(AB)) = \{X;\ A * X * B\}.$$

O **interior de uma semi-reta** S_{AB} é constituído dos pontos da semi-reta diferentes da sua origem:

$$\text{int}(S_{AB}) = \{B\} \cup \{X; A * X * B\} \cup \{X; A * B * X\}.$$

O interior de um ângulo $B\widehat{A}C$ é a interseção dos semi-planos H_{AB}^{C} e H_{AC}^{B}:

$$\text{int}(B\widehat{A}C) = H_{AB}^{C} \cap H_{AC}^{B}.$$

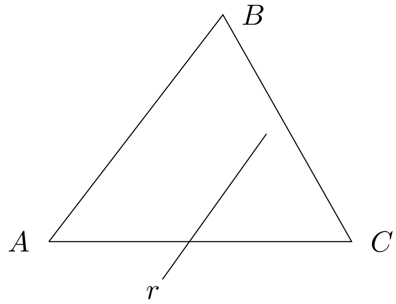
O interior de um triângulo $\triangle ABC$ é a interseção dos semi-planos H_{AB}^{C}, H_{AC}^{B} e H_{BC}^{A}:

$$\text{int}(\triangle ABC) = H_{AB}^{C} \cap H_{AC}^{B} \cap H_{BC}^{A}$$

Deste Roteiro, é importante que o aluno compreenda bem os teoremas destacados nos itens 1 e 2: Teorema de Pasch, Teorema da semi-reta do interior de um ângulo, Recíproca do teorema da semi-reta do interior de um ângulo, Teorema do Angulo Raso e o Teorema dos Ângulos Opostos pelo Vértice. As suas demonstrações, que demandam as outras proposições do roteiro, podem ser dispensadas neste momento.

Item 6B.1. Teoremas que dependem do axioma de separação do plano, sem envolver medida de ângulos. {item:62:1} {teorema:pa

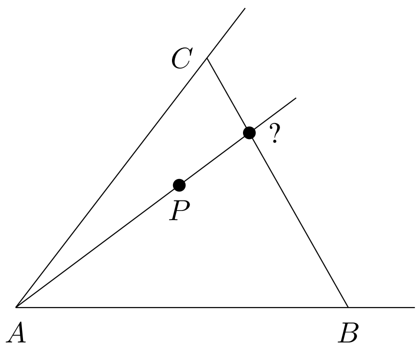
Teorema 6.2. ***Teorema de Pasch (Moritz Pasch, 1843-1930).*** *Se uma reta corta o interior de um lado de um triângulo, então ela terá que cortar um dos outros dois lados.*



Observação. O Teorema de Pasch foi demonstrado no Roteiro 5. Ele é o Teorema A daquele roteiro. Pode-se provar que o Teorema de Pasch é equivalente ao Axioma de Separação do Plano (ASP). Sendo assim, ele pode ser adotado como axioma no lugar do ASP, como, aliás, fez Pasch. Para provar a equivalência dos dois, basta provar que adotado o Teorema de Pasch como axioma pode-se provar o ASP, pois já provamos o Teorema de Pasch a partir do ASP. Não o faremos aqui.

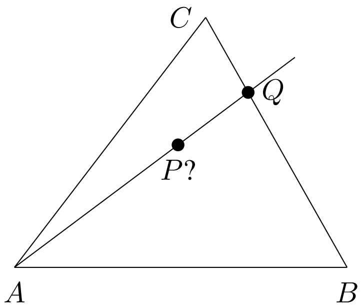
mirreta:interior}

Teorema 6.3. ***Teorema da semi-reta do interior de um ângulo.*** *Se o ponto P está no interior do ângulo $B\widehat{A}C$, então a semi-reta S_{AP} corta o segmento BC.*



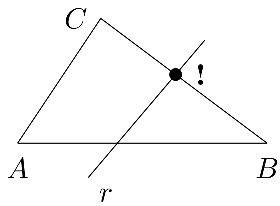
terior:reciproca}

Teorema 6.4. ***Recíproca do teorema da semi-reta do interior de um ângulo.*** *Se a semi-reta S_{AP} corta o interior do segmento BC, então P está no interior do ângulo $B\widehat{A}C$.*

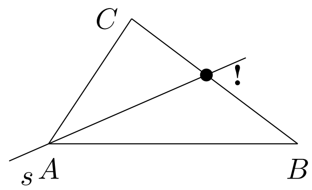


Observação. O Teorema de Pasch e o Teorema da semi-reta do interior de um ângulo descrevem o que acontece com uma reta que se adentra num triângulo: o primeiro pelo interior de um lado e o segundo por um vértice. Em ambos os casos, ào sair do triângulo ela terá que cortar o triângulo novamente. Veja a figura abaixo.

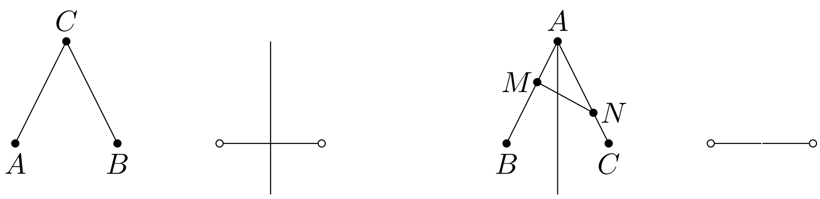
Teorema de Pasch:



Lema da semi-reta do interior de um ângulo:



Figuras ilustrativas no modelo bizarro:

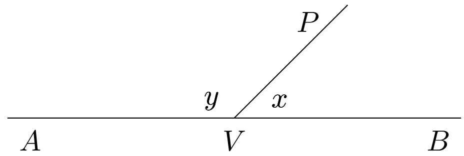


Estes fatos são tão óbvios, que talvez ninguém antes de Pasch tenha pensado que eles precisam de demonstração. Foi Pasch que percebeu a necessidade de um axioma que não estava entre os axiomas de Euclides para poder demonstrá-los. No modelo bizarro, em que não vale o axioma de separação do plano, o Teorema de Pasch não vale. Uma das figuras acima mostra uma reta r que corta apenas o lado AB do triângulo ABC.

O Teorema da semi-reta do interior de um ângulo garante que a semi-reta S_{AP} corta qualquer segmento que liga pontos dos lados do ângulo. O seu enunciado nem tem sentido no modelo bizarro, pois não existe interior de ângulo neste modelo. Uma das figuras acima mostra uma semi-reta no modelo bizarro que corta o segmento MN, mas não corta o segmento BC.

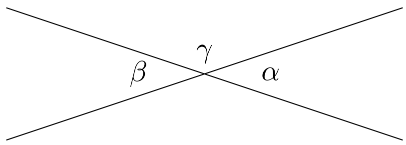
Item 6B.2. Teoremas que envolvem medida de ângulos. {item:62:2} {teorema:an

Teorema 6.5. ***Teorema do Ângulo Raso.*** *Sejam A, V e B três pontos tais que $A*V*B$ e seja P um ponto fora da reta AB. Então $m(A\widehat{V}P)+m(P\widehat{V}B)-180$. Reciprocamente, se A e B são pontos que estão em lados opostos da reta VP e $m(A\widehat{V}P)+m(P\widehat{B}V)-180$, então $A*V*B$.*



:angulos:opostos}

Teorema 6.6. ***Teorema dos Ângulos Opostos pelo Vértice.*** *Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.*

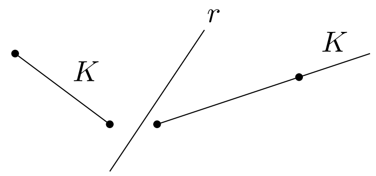


{item:62:3} ***Item 6B.3.*** Demonstrações do Teorema da semi-reta do interior de um triângulo e da sua recíproca:
As demonstrações dos dois teoremas é muito longa. Elas dependem de vários teoremas que desenvolveremos em seguida.

Proposição 6.7. ***Proposição A.*** *Segmento, semi-reta, interior de segmento e interior de semi-reta são conjuntos convexos. [Um conjunto K é convexo, se $P, Q \in K = seg(PQ)$ está contido em K.]*

Demonstração. Faremos a demonstração apenas para o caso de uma semi-reta $S_{AB} = \{A, B\}u\{X;\ A*X*B\} \cup \{X;\ A*B*X\}$.
Sejam $P, Q \in S$. Queremos mostrar que $seg(PQ)$ está contido em S. Para isto devemos mostrar que, se X está entre P e Q, $P*X*Q$, então $X \in S$. Temos vários casos a considerar, conforme a posição de P e Q em relação a A e B. Vamos tratar do caso em que $A*P*B$, $A*Q*B$. Todos os outros casos são tratados de maneira semelhante.
Seja $f : reta(AB) \to \mathbb{R}$ um sistema de coordenadas para a reta AB. Sejam $a = f(A)$, $b = f(B)$, $p = f(P)$, $q = f(Q)$, $x = f(X)$. Sem perda de generalidade podemos supor que a < b e p < q.
Temos que $A*P*B \ \Rightarrow\ a < p < b$
$A*Q*B \ \Rightarrow\ a < q < b$. Donde $a < p < q < b$.
Temos também $P*X*Q \ \Rightarrow\ p < x < q \ \Rightarrow\ a < x < b \ \Rightarrow\ A*X*B \ \Rightarrow\ X \in S_{AB}$. Isto concluí a prova de que $\mathrm{seg}(PQ)$ está contido em S. $\square$

Proposição 6.8. ***Proposição B.*** *Seja K um segmento, uma semi-reta ou o interior deles. Se K não corta uma reta r, então K está contido em um dos semi-planos determinados por r.*

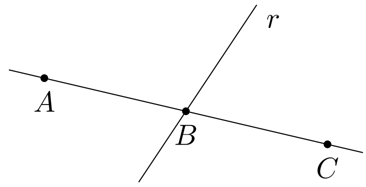


Demonstração. Sejam H_1 e H_2 os semiplanos determinados por r. Seja A um ponto de K que está em $H1$. Suponhamos, por absurdo, que existe um ponto B de K que está em H_2. Então, pelo Axioma de Separação do Plano, o segmento AB corta r. Isto implica que K também corta r, já que o segmento AB está contido em K (Proposição A). Isto contraria a hipótese de que K não corta r. $\square$

Proposição 6.9. ***Proposição C.*** *Se $A * B * C$ e a reta AC corta uma reta r em B, então*

(a) os interiores de $\text{seg}(BA)$ e de S_{BA} estão do mesmo lado de r,

(b) os interiores de S_{BA} e S_{BC} estão em lados opostos de r.



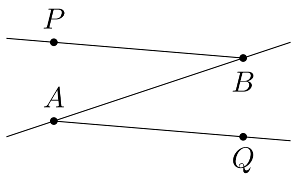
Demonstração. Acompanhe a demonstração com a figura acima. Parte (a). Seja $X \in \text{int}(\text{seg}(AB))$. Então A*X*B que, juntamente com $A * B * C$, implica em $X * B * C$. Isto implica que $\text{seg}(XC)$ corta a reta r, donde X e C éstão em lados opostos de r. Como A e C também estão em lados opostos de r, resulta que A e X estão do mesmo lado de r. Isto implica que os pontos de $\text{int}(\text{seg}(AB))$ estão todos do mesmo lado de r. De maneira semelhante, provamos que os pontos de $\text{int}(S_{BA})$ estão do mesmo lado de r.
Parte (b).

$$X \in \text{int}(S_{BA}) \;\Rightarrow\; X = A \text{ ou } A * X * B \text{ ou } B * A * X.$$

$$Y \in \text{int}(S_{BC}) \;\Rightarrow\; Y = C \text{ ou } \; B * Y * C \text{ ou } B * C * Y.$$

Em qualquer caso, temos X e Y em lados opostos de r. Isto implica que $\mathrm{int}(S_{BA})$ e $\mathrm{int}(S_{BC})$ estão em lados opostos de r. □

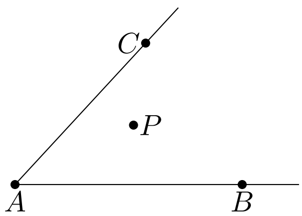
Lema 6.10. ***Lema do Z.*** *Se P e Q estão em lados opostos da reta AB, então S_{BP} e S_{AQ} não têm ponto em comum.*



[A figura acima parece uma letra z; por isso este lema é denominado Lema do Z.]

Demonstração. Digamos que P está no semi-plano H_1 e Q está no semi-plano H_2. Pela Proposição C, $int(S_{BP})$ está contido em H_1 e $int(S_{AQ})$ está contido em H_2, logo $\mathrm{int}(S_{BP})$ e $\mathrm{int}(S_{AQ})$ não têm ponto em comum. Como A e B são distintos, segue que S_{BP} e S_{AQ} não têm ponto em comum. □

Proposição 6.11. ***Proposição D.*** *$P \in \mathrm{int}(BAC) \Leftrightarrow B$ e P estão do mesmo lado de AC e C e P estão do mesmo lado de AB.*



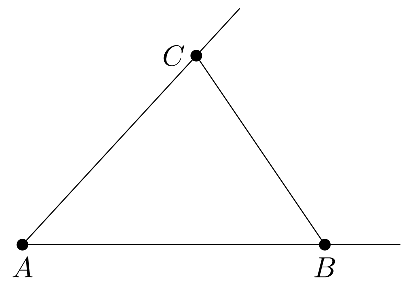
Demonstração. Por definição, $int(BAC) = H_{AB}^C \cap H_{AC}^B$. Então, $P \in int(BAC) \Rightarrow P \in H_{AB}^C$ e $P \in H_{AC}^B$. Temos $P \in H_{AB}^C \Rightarrow seg(PC)$ está contido em H_{AB}^C (propriedade (ii) da definição de "reta separa o plano"), donde C e P estão do mesmo lado de AB. $P \in H_{AC}^B \Rightarrow \mathrm{seg}(PB)$ está contido em H_{AC}^B (propriedade (ii) da definição de "reta separa o plano"), donde B e P estão do mesmo lado de AC. Isto prova um sentido ($\Rightarrow$) da proposição. Provemos o outro sentido.
Temos

$$B \text{ e } P \text{ do mesmo lado de } AC \Rightarrow P \in H_{AC}^B.$$

$$C \text{ e } P \text{ do mesmo lado de } AB \Rightarrow P \in H_{AB}^C.$$

Destas duas condições, resulta que $P \in H_{AB}^C \cap H_{AC}^B$, provando o outro sentido. □

Proposição 6.12. ***Proposição E.*** *Seja* $B\widehat{A}C$ *um ângulo. Então* $\mathrm{int}(CB)$ *está contido em* $\mathrm{int}(B\widehat{A}C)$.



Demonstração. Temos

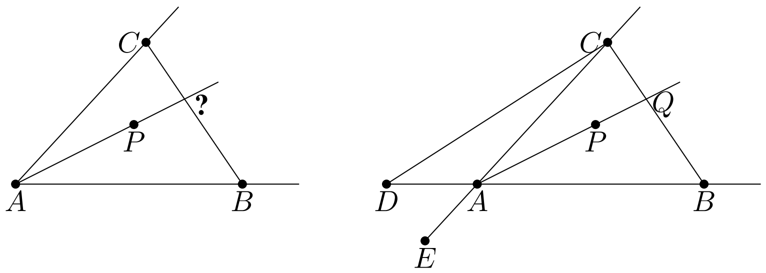
(1) $\mathrm{int}(\mathrm{seg}(CB))$ está contido em H_{CA}^{B} (Proposição C).

(2) $\mathrm{int}(\mathrm{seg}(CB))$ está contido em H_{BA}^{C} (Proposição C).

De (1) e (2), resulta que $\mathrm{int}(\mathrm{seg}(CB))$ está contido em $H_{CA}^{B} \cap HCBA = \mathrm{int}(BAC)$.
$\square$

Observação. Na ausência do Axioma de unicidade de paralelas, a recíproca desta proposição é falsa; isto é, nem todo ponto do interior de um ângulo está num segmento que liga dois pontos dos lados do ângulo. É preciso um exemplo concreto para nos convencer disto, já que este fato vai contra a nossa intuição. O contra-exemplo para a recíproca será dado no modelo de Klein, num capítulo posterior.

Teorema 6.13. ***Teorema da semi-reta do interior de um ângulo.*** *Se o pontó* P *está no interior do ângulo* $B\widehat{A}C$*, então a semi-reta* S_{AP} *corta o segmento* BC.



Demonstração. Queremos mostrar que a semi-reta S_{AP} da primeira figura corta o segmento BC. A idéia da demonstração é construir um novo triângulo $\triangle BCD$ e aplicar a ele o Teorema de Pasch para concluir que a reta AP, que corta o lado BD, terá que cortar o lado BC num ponto Q e, depois, que Q está na semi-reta S_{AP}. Para construir o novo triângulo, basta tomar um ponto D tal que $D * A * B$, como mostra a segunda figura, acima.

Primeiramente, mostremos que a reta AP corta o lado BC. Para isto aplicaremos o Teorema de Pasch ao $ABCD$, mostrando que a reta AP não corta o lado CD. Temos

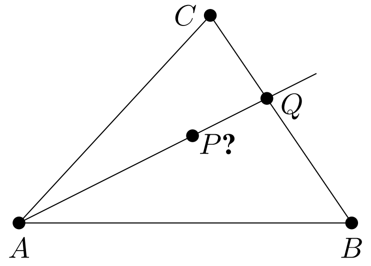
$$P \in int(BAC) \;\Rightarrow\; B \text{ e } P \text{ estão do mesmo lado de } AC \text{ (Proposição D)}$$

$$D * A * B \;\Rightarrow\; B \text{ e } D \text{ estão em lados opostos de } AC$$

Logo, P e D estão em lados opostos de AC. Pelo Lema do Z, aplicado à reta AC, $int(CD)$ e $int(SAp)$ não se interceptam. Portanto, SAp não corta $\text{seg}(CD)$.

Seja agora SAE a semi-reta oposta a SAp. Então E e C estão em lados opostos de AB. O Lema do Z aplicado à reta AB, garante que S_{AE} não corta o $\text{seg}(CD)$. Logo, a reta AP ($= S_{AP}v \cup S_{AE}$) não corta $\text{seg}(CD)$. Pelo Teorema de Pasch, a reta AP corta o lado BC num ponto Q. O ponto Q está na reta AP; por que está na semi-reta S_{AP}? Resposta: porque P e Q estão do mesmo lado de AB. Isto conclui a demonstração. □

Teorema 6.14. ***Recíproca do teorema da semi-reta do interior de um ângulo.*** *Se a semi-reta SAp corta o interior do segmento BC, então P está no interior do ângulo BAC.*



Demonstração.

(1) Q e C estão do mesmo lado de AB (Proposição C).

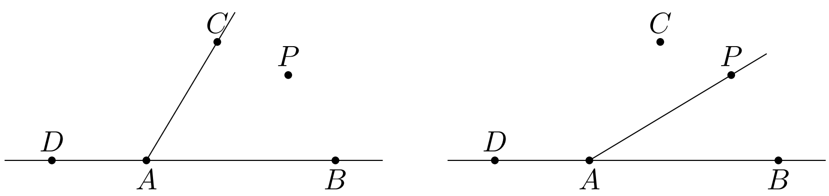
(2) Q e P estão do mesmo lado de AB (Proposição C).

(3) Logo, P e C estão do mesmo lado de AB: $P \in H^B_{AC}$.

Da maneira análoga, P e B estão do mesmo lado de AC: $P \in H^B_{AC}$.
Portanto, P está no interior do ângulo $B\widehat{A}C$. □

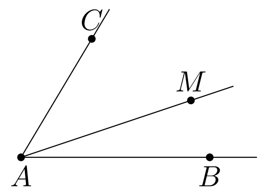
Item 6B.4. Demonstrações do Teorema do Ângulo Raso e do Teorema dos Ângulos Opostos pelo Vértice. {item:62:4}

Proposição 6.15. ***Proposição F.*** *Se $B * A * D$, então $P \in \mathrm{int}(Bk)$ se e somente se $C \in \mathrm{int}(P; \widehat{A}D)$.*

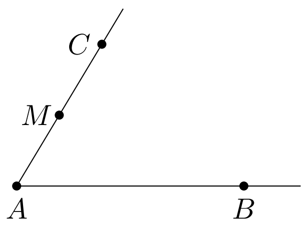


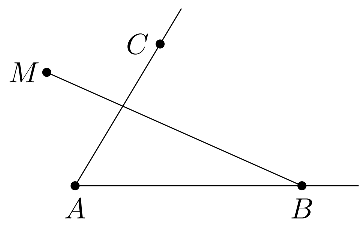
Demonstração. Sentido "$\Rightarrow$".
$P \in \mathrm{int}(B\widehat{A}C) \;\Rightarrow\; P$ e B estão do mesmo lado de AC (Proposição D) . $B * A * D \;\Rightarrow\; D$ e B estão em lados opostos de AC. Logo, D e P estão em lados opostos de $AC > \mathrm{seg}(DP)$ corta $AC \Rightarrow\; C \in \mathrm{int}(P\widehat{A}D)$ (Recíproca do teorema da semi-reta do interior de um ângulo). Para o outro sentido a demonstração é análoga. □

Proposição 6.16. ***Proposição G.*** *Se M e C estão do mesmo lado da reta AB e $m(B\widehat{A}M) < m(B\widehat{A}C)$, então M está no interior de BAC.*

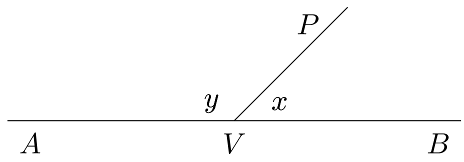


Demonstração. Queremos mostrar que, nas hipóteses da proposição, a situação é a ilustrada na figura acima: M está no $\operatorname{int}(B\widehat{A}C)$. Isto é, $M \in H_{AB}^{C} \cap H_{AC}^{B}$, pela definição de interior de ângulo. Como, por hipótese, $M \in H_{AB}^{C}$, resta mostrar que $M \in H_{AC}^{B}$. Procedendo por absurdo, a negação desta última afirmação, $M \in H_{AC}^{B}$, significa $M \in AC$ ou M e B estão em lados opostos de AC (figuras abaixo).
Suponhamos que $MEAC$. Então $B\widehat{A}M = B\widehat{A}C$, contrariando a hipótese.
Suponhamos que M e B estão em lados opostos de AC. Então $seg(MB)$ corta AC e, como M e C estão do mesmo lado de AB, $\operatorname{seg}(MB)$ corta SAc. Portanto, C está no $\operatorname{int}(B\widehat{A}M)$, pela recíproca do teorema da semireta do interior de um ângulo. Daí, $m(B\widehat{A}C) + m(C\widehat{A}M) = m(B\widehat{A}M)$, pela propriedade (iii) da definição de reta separa o plano. Logo, $m(B\widehat{A}M) > m(B\widehat{A}C)$, contrariando a hipótese.
Como a negação de $M \in H_{AC}^{B}$ leva a uma contradição, então esta afirmação é verdadeira, completando a demonstração. $\square$

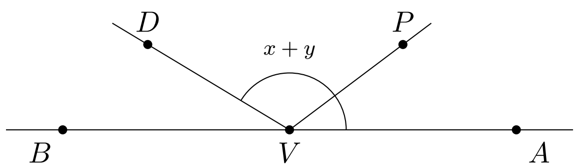


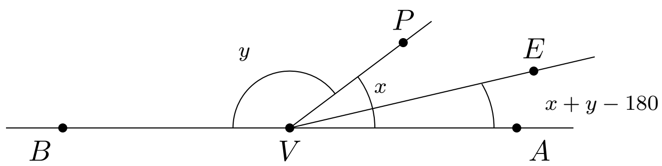


Teorema 6.17. ***Teorema do Ângulo Raso.*** *Se P está fora da reta AB, então $m(A\widehat{V}P) + m(P\widehat{V}B) = 180$. Reciprocamente, se A e B são pontos que estão em lados opostos da reta VP e $m(A\widehat{V}D) + m(P\widehat{V}B) = 180$, então $A * V * B$.*



Demonstração. Façamos $m(A\widehat{V}P) = xem(P\widehat{V}B)) = y$. Mostraremos que as possibilidades $x + y < 180$ e $x + y > 180$ levam a contradição restando, pois, a que se quer provar na primeira parte do teorema: $x + y = 180$.
Suponhamos que $x + y < 180$.
Passo 1. Existe exatamente uma semi-reta S_{VP}, sendo D do mesmo lado de AV que P, tal que $m(A\widehat{P}D) = x + y$ (Propriedade (ii) de medida de ângulo. Figura abaixo, à esquerda.)
Passo 2. Como $x < x + y$, então o ponto P está no interior de $A\widehat{V}D$. (Proposição G).
Passo 3. $m(A\widehat{V}P) + m(P\widehat{V}D)) = m(A\widehat{V}D)$. (Propriedade (iii) de medida de ângulo).
Passo 4. $x + m(P\widehat{V}D) = x + y$, donde $m(P\widehat{V}D) = y$.
Passo 5. Como $D \in \text{int}(P\widehat{V}B)$ (por que?), temos $m(P\widehat{V}D) + In(D\widehat{V}B) = m(P\widehat{V}B)$.
Passo 6. $y + m(D\widehat{V}B) = y$, donde $m(D\widehat{V}B) = 0$, uma contradição.
Logo, não pode ser $x + y < 180$.





Figuras colocado um em cima da outra para não sair da margem.

Suponhamos, agora, que $x + y > 180$. Figura acima, à direita.
Passo 7. $x + y < 360$, pois $x < 180$ e $y < 180$.
Passo 8. $O < x + y - 180 < 180$.
Passo 9. Existe exatamente uma semi-reta SvE, sendo E do mesmo lado de AV que P, tal que $m(A\widehat{V}E) = x + y - 180$.
Passo 10. O ponto E está em $int(A\widehat{V}E)$, porque $x + y - 180 < x$. (Proposição G)
Passo 11. $m(A\widehat{V}E) + m(E\widehat{V}P) = m(A\widehat{V}P)$.
Passo 12. $x + y - 180 + m(E\widehat{V}P) = x$, donde $m(E\widehat{V}P) = 180 - y$.
Passo 13. Como $P \in \text{int}(E\widehat{V}B)$ (Proposição F), temos $m(E\widehat{V}P) + m(P\widehat{V}B) = m(E\widehat{V}B)$.
Passo 14. $180 - y + y = m(E\widehat{V}B)$, donde $m(E\widehat{V}B) = 180$. Contradição.
Portanto, $x + y > 180$ também é falso. Logo, resta $x + y = 180$.

Demonstração da recíproca.
Seja M um ponto tal que $A * V * M$ (figura abaixo). Pela parte já demonstrada, temos

$$m(A\widehat{V}P) + m(P\widehat{V}M) = 180.$$

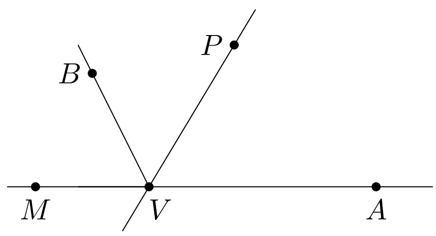
Por hipótese, temos

$$m(A\widehat{V}P) + m(P\widehat{V}B) = 180.$$

Logo,

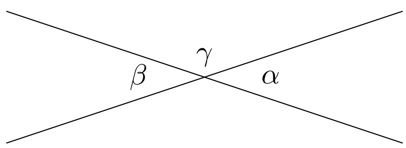
$$m(P\widehat{V}M) = m(P\widehat{V}B).$$

Como M e B estão do mesmo lado da reta VP, e as semi-retas S$_{VB}$ e S_{VM} fazem com a semi-reta S_{VP} ângulos com a mesma medida, então $S_{VB} = S_{VM}$, pela propriedade (ii) da definição de medida de ângulo. Isto conclui a demonstração do teorema. □



Definição 6.8. *Dois ângulos são opostos pelo vértice se os lados de um são as semi-retas opostas dos lados do outro.*

Teorema 6.18. ***Teorema dos Ângulos Opostos pelo Vértice.*** *Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.*



Demonstração. Temos $a + y = 180$ e $3 + 7 = 180$. Logo, $\alpha = \beta$. □

6.3 Resumo

Objetos primitivos: *ponto* e *reta*.
Relação primitiva: [ponto] *pertence* a [reta] ("relação de incidência").
Relação definida: [ponto] *entre* [dois pontos] ("relação de ordem").
Objetos definidos: *retas que se interceptam; retas paralelas; circunferência; interior e exterior de circunferência; segmento; triângulo; distância entre dois pontos; sistema de coordenadas para cada reta; reta separa plano; semi-plano; interior e exterior de triângulo, semi-reta, ângulo, interior de ângulo, medida de ângulo, perpendiculares, distância de ponto a reta, retas eqüidistantes, ângulos opostos pelo vértice.*
Axiomas anteriores: 3 de incidência, 2 de paralelismo, axioma da régua, axioma de separação do plano.
Modelos aniquilados pelos axiomas anteriores: modelos finitos, modelo bizarro.
Modelos que ainda continuam: modelo cartesiano, modelo do taxista, modelo de Moulton.

Definição. A **semi-reta** de origem A que passa por B é o conjunto $S_{AB} = \text{seg}(AB) \cup \{X; A * B * X\}$.

Definição.
Ângulo é o conjunto formado pelos pontos que estão em duas semi-retas de mesma origem: sendo A, B e C não colineares, $B\widehat{A}C = S_{AB} \cup S_{AC}$. O ponto A é o vértice do ângulo, as semi-retas S_{AB} e S_{AC} são os lados do ângulo.

Definição. O **interior do ângulo** $B\widehat{A}C$ é á interseção dos semi-planos H_{AB}^{C} e H_{AC}^{B}. Com a notação H_{AB}^{C} entendemos o semi-plano determinado pela reta AB e o ponto C.

Definição. Uma **medida de ângulo em grãus** é uma função m que a cada ângulo a faz corresponder um número m(a), com as seguintes propriedades:

(i) $O < m(a) < 180$;

(ii) dada uma semi-reta S_{AB}, seja H um dos semi-planos determinados pela reta AB; então, dado um número a entre 0 e 180, existe exatamente uma semi-reta S_{AC}, sendo $C \in H$, tal que $m(B\widehat{A}C) = a$;

(iii) se M está no interior do ângulo $\angle B\widehat{A}C$, então

$$m(B\widehat{A}M) + m(M\widehat{A}C) = m(B\widehat{A}C)$$

Axioma do transferidor. Existe medida de ângulo.

Definição. Duas retas r e s são **perpendiculares** se a união de r e s contém um ângulo reto.

Teorema A. *Se P é um ponto de uma reta dada r, então existe uma e uma só perpendicular à reta r passando por P.*

Definição. Seja r uma reta e seja P um ponto fora de r. A **distância** de P a r, indicada por $d(P,r)$, é a menor das distâncias de P aos pontos de r. Em símbolos: $d(P,r) = min\{d(P,X);\ X \in r\}$.

Definição. A reta r é eqüidistante da reta s se dados dois pontos quaisquer A e B de r, tem-se $d(A,s) = d(B,s)$.

Definição. Dois ângulos são opostos pelo vértice se os lados de um são as semi-retas opostas dos lados do outro.

Teorema do Ângulo Raso.
Sejam A, V e B três pontos tais que $A * V * B$. Se P está fora da reta AB, então $m(A\widehat{V}P) + m(P\widehat{V}B) = 180$. Reciprocamente, se A e B são pontos que estão em lados opostos da reta VP e $m(A\widehat{V}P) + m(P\widehat{V}B) = 180$, então $A * V * B$.

Teorema de Pasch. *Se uma reta corta o interior de um lado de um triângulo, então ela terá que cortar um dos outros dois lados.*

Teorema da semi-reta do interior de um ângulo. *Se o ponto P está no interior do ângulo $B\widehat{A}C$, então a semi-reta S_{AP} corta o segmento BC.*

Teorema dos Ângulos Opostos pelo Vértice. *Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.*

6.4 Lista de Exercícios n. 6

A não ser que esteja explicito em contrário no enunciado do exercício, consideram-se em vigor todos os oito axiomas (3 de incidência, 2 de paralelismo, da régua, e separação do plano e do transferidor).

6.1. *Como é a medida de ângulo no modelo cartesiano? E no modelo do taxista?*

6.2. *Tem sentido o conceito de ângulo no modelo bizarro?*

6.3. *Tem sentido o conceito de medida de ângulo no modelo bizarro?*

6.4. *Como é a medida de ângulo no modelo de Moulton?*

6.5. *Defina ângulos agudo, reto e obtuso.*

6.6. *Defina retas perpendiculares.*

6.7. *Prove o Teorema A.*

6.8. *Represente a perpendicular à reta de Moulton $y = -x$ pela origem, e pelos pontos $(1, -1)$ e $(-1, 1)$.*

6.9. *Por um ponto fora de uma reta dada existe uma reta perpendicular à reta dada? É única?*

6.10. *Construa um triângulo com dois ângulos retos.*

6.11. *Defina distância de um ponto a uma reta.*

6.12. *Considere a reta de Moulton r dada por $y = x$, se $x \leq 0$ e $y = x/2$ se $x > 0$. Delimite numa figura*

(a) a região dos pontos em que não existe perpendicular a r e (b) a região dos pontos em que existem duas perpendiculares a r.

6.13. *Qual é a distância do ponto $P = (-1/3, 2/3)$ à reta r do exercício 12? (Observe que não existe perpendicular a r por P.)*

6.14. *Considere a reta de Moulton r do exercício 12 e o ponto $Q = (1, -1)$. Qual é a distância de Q a r? (Observe que existem duas perpendiculares a r por Q.)*

6.15. *No modelo cartesiano, a distância de um ponto P a uma reta r é o comprimento do segmento perpendicular baixado de P a r. Prove.*

6.16. *No modelo de Moulton, considere a reta r do exercício 12 e a reta s paralela a r pelo ponto $A = (0, 1)$. As retas paralelas r e s são eqüidistantes?*

6.17. *As retas de Moulton r de equação $y = -x$ e s de equação $y = -x - 1$ são retas paralelas de declividade negativa. São eqüidistantes? [Cuidado! Não se iluda com a figura.]*

6.18. *Como você definiria paralelogramo? Num paralelogramo, os lados opostos são iguais? E os ângulos opostos?*

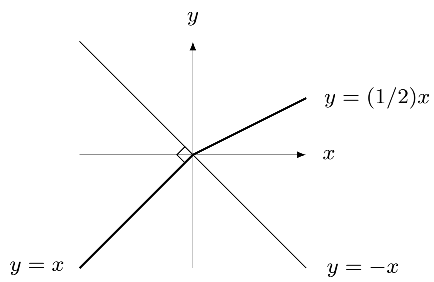
6.19. *No modelo de Moulton, considere os pontos $O = (0, 0)$, $A = (1, 1/2)$, $B = (0, -1/2)$ e $C = (-1, -1)$. O que representa a figura $OABC$? Que relação há entre os comprimentos dos seus lados?*

6.20. *Para os triângulos ABC e EFG tem-se $AB = EF$, $AC = EG$ e $\widehat{A} = \widehat{E}$. Podemos afirmar que BC = FG?*

6.5 Soluções da Lista de Exercícios n. 6

6.8. *Represente a perpendicular à reta de Moulton $y = -x$ pela origem, e pelos pontos $(1, -1)$ e $(-1, 1)$.*

Resposta:
A reta é $y = x$,se $x < 0$ e $y = (1/2)x$ se $x > 0$.



6.9. *Por um ponto fora de uma reta dada existe uma reta perpendicular à reta dada? É única?*

Resposta:
Os axiomas atuais não garantem que existe e, quando existe, pode não ser única. Contra-exemplos no modelo de Moulton: veja o Roteiro **??**, item **??**. Veja também o exercício **??**.

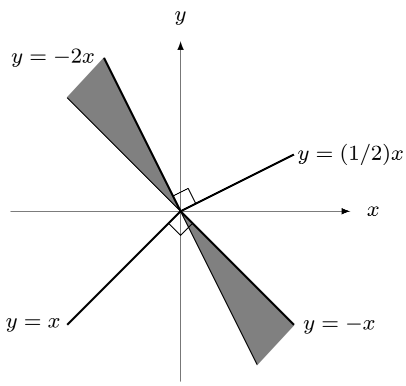
6.10. *Construa um triângulo com dois ângulos retos.*

Resposta:
Veja o triângulo QOP do exercício **??**.

6.12. *Considere a reta de Moulton r dada por $y = x$, se $x \leq 0$ e $y = x/2$ se $x > 0$. Delimite numa figura*

(a) a região dos pontos em que não existe perpendicular a r e (b) a região dos pontos em que existem duas perpendiculares a r.

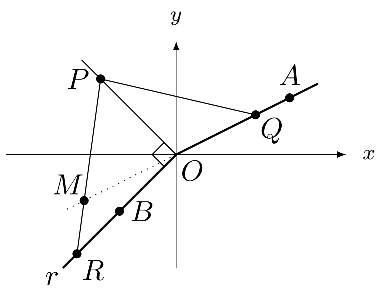
Resposta:
Na figura abaixo, não existe perpendicular a r pelos pontos que estão na região destacada no segundo quadrante. No quarto quadrante, na região destacada, estão os pontos pelos quais passam duas perpendiculares a r. Argumente.



6.13. *Qual é a distância do ponto $P = (-1/3, 2/3)$ à reta r do exercício 12? (Observe que não existe perpendicular a r por P.)*

Resposta:

Seja A um ponto da reta r, no primeiro quadrante, e seja B um ponto de r no terceiro quadrante. O ponto P está na reta $y = -2x$, que é perpendicular cartesiánamente à reta OA (não é perpendicular segundo Moulton).



Quando Q está em r, no primeiro quadrante, PQ é obliqua à reta r. Portanto, $PO < PQ$, para todo Q na semi-reta OA.

Quando R está em r, no quarto quadrante, PR corta a reta cartesiana OA no ponto M. Como PM é obliqua à reta cartesiana OA, temos

$$PO < PM < PR, \text{ para todo } R \text{ na semi-reta } OB.$$

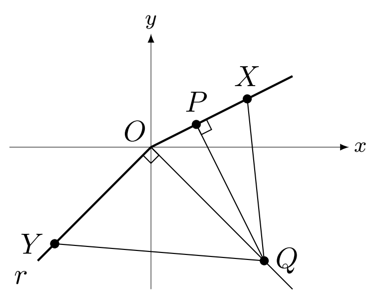
Logo, PO é o menor dos segmentos que ligam P a um ponto de r. Consequentemente, a distância de P a r é o comprimento do segmento PO. [Por definição, temos $d(P, r) =$ mínimo $\{PX; X \in r\}$.] Temos

$$d(P, r) = PO = \sqrt{(1/3)^2 + (2/3)^2} = \sqrt{5}/3.$$

6.14. *Considere a reta de Moulton r do exercício 12 e o ponto $Q = (1, -1)$. Qual é a distância de Q a r? (Observe que existem duas perpendiculares a r por Q.)*

Resposta:

Pelo ponto Q passam duas perpendiculares a r segundo Moulton: QO e QP. A primeira, QO, é cartesianamente perpendicular a OY, enquanto que QP é cartesianamente perpendicular a OX. Qualquer que seja X de r, no primeiro quadrante, tem-se $QP < QX$. Da mesma maneira, qualquer que seja Y em r, no terceiro quadrante, $QO < QY$. Portanto, a distância de Q ar é a menor das distâncias entre QO e QP.

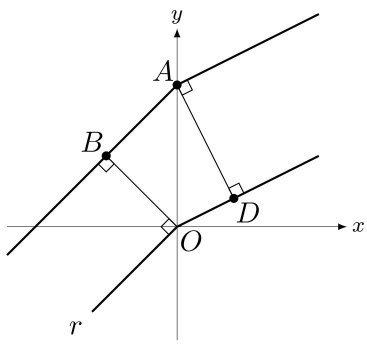


Temos $QO = \sqrt{2}$. Agora, para calcular QP, observamos que a equação da reta QP é dada por $y + 1 = -2(x - 1)$. O ponto P é a interseção desta reta com a reta $y = x/2$. Obtém-se $P = (2/5, 1/5)$. Agora calcule a distância cartesiana de QP e compare com QO, para escolher a menor delas.

6.16. *No modelo de Moulton, considere a reta r do exercício 12 e a reta s paralela a r pelo ponto $A = (0, 1)$. As retas paralelas r e s são eqüidistantes?*

Resposta:

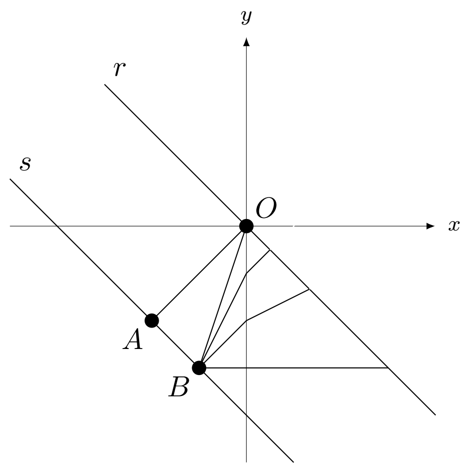
Não são eqüidistantes. Basta exibir dois pontos de s cujas distâncias a r são diferentes, por exemplo, os pontos A e B da figura abaixo. Faça as contas.



6.17. *As retas de Moulton r de equação $y = -x$ e s de equação $y = -x - 1$ são retas paralelas de declividade negativa. São eqüidistantes? [Cuidado! Não se iluda com a figura.]*

Resposta:

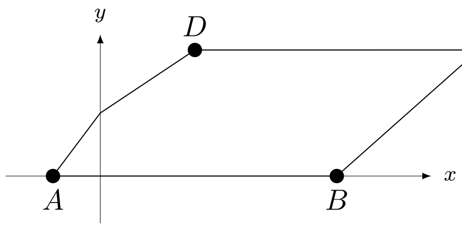
Não são eqüidistantes. Na figura abaixo, os pontos $A = (-1/2, -1/2)$ e $B = (-1/4, -3/4)$ estão na reta s e não são eqüidistantes da reta r. A distância de A a r é o comprimento do segmento AO. Na figura estão também representados alguns segmentos de Moulton ligando B a pontos de r. O leitor não terá dificuldade para concluir que os comprimentos de Moulton dos segmentos que ligam B a pontos de r são todos maiores que AO. Conclui-se que os pontos A e B não são eqüidistantes de r.



6.18. *Como você definiria paralelogramo? Num paralelogramo, os lados opostos são iguais? E os ângulos opostos?*

Resposta:

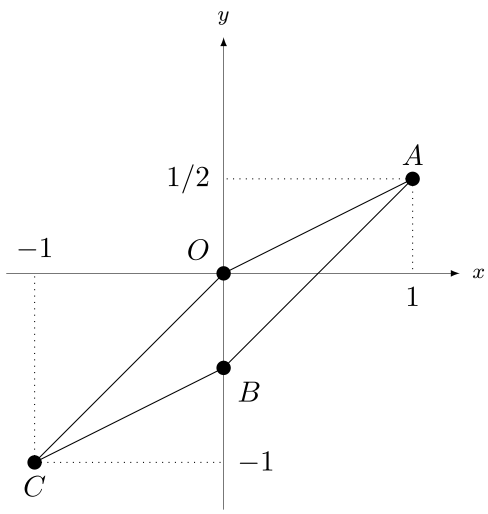
Observe o paralelogramo $ABCD$ da figura abaixo, no modelo de Moulton. Como se pode perceber, o lado AD é diferente de BC e o ângulo A é diferente do ângulo B.



6.19. *No modelo de Moulton, considere os pontos* $O = (0, 0)$*,* $A = (1, 1/2)$*,* $B = (0, -1/2)$ *e* $C = (-1, -1)$*. O que representa a figura* $OABC$*? Que relação há entre os comprimentos dos seus lados?*

Resposta:

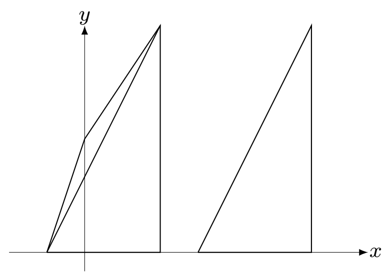
O ponto O está na reta de Moulton AC (a declividade de CO é 1 e a de OA é 1/2). Os pontos A, B e C não são colineares. Logo, a figura é um triângulo de vértices A, B e C. No modelo cartesiano, a figura é um paralelogramo. Portanto, $OA = BC$ e $CO = BA$. Disto resulta que, no modelo de Moulton, o lado AB do triângulo ABC é igual á soma dos outros dois lados CB e BA.



6.20. *Para os triângulos ABC e EFG tem-se $AB = EF$, $AC = EG$ e $\widehat{A} = \widehat{E}$. Podemos afirmar que BC = FG?*

Resposta:

Não. Veja a figura abaixo, no modelo de Moulton.



Capítulo 7

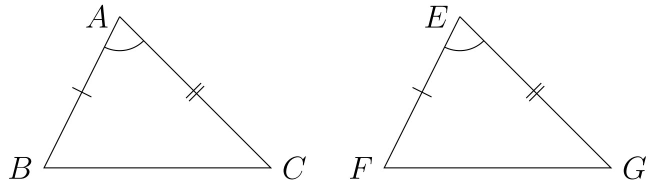
Congruência de triângulos

7.1 Roteiro 7. Congruência de triângulos {roteiro:7}

Conteúdo: Congruência de triângulos. Axioma de congruência de triângulos. Casos de congruência de triângulos. Teorema dos ângulos correspondentes. Existência e unicidade de perpendicular a uma reta dada por um ponto fora da reta. Revisão dos axiomas de existência e de unicidade de paralela (P_1 e P_2). Modelo de Klein.

Item 7.1. Congruência de triângulos em Euclides. "Os Elementos", de Euclides, foi escrito há cerca de 2300 anos atrás. O livro começa enunciando a definição de alguns objetos geométricos, em seguida enuncia os cinco postulados e cinco "noções comuns"(postulados que se aplicam a objetos mais gerais). Em seguida, Euclides passa para as proposições, acompanhadas das suas demonstrações. Nos 13 Livros que constituem "Os Elementos"são provadas 468 proposições. {item:7:1}

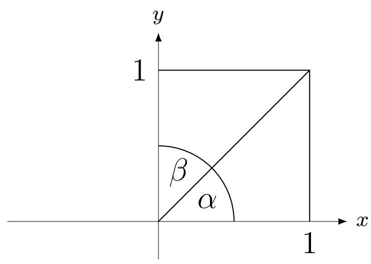
A Proposição 4 do Livro 1 é o que denominamos hoje de "primeiro caso de congruência de triângulos". A hipótese desta proposição é a seguinte: $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ são dois triângulos, $AB = EF$, $\widehat{A} = \widehat{E}$, $AC = EG$. A tese é: $\triangle ABC$ é congruente a $\triangle EFG$.



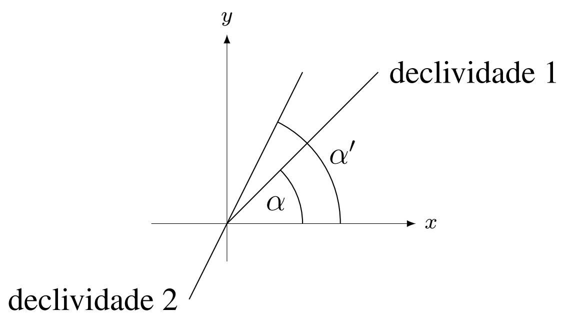
Euclides usa a seguinte estratégia para a demonstração (veja Os Elementos Euclides. São Paulo: Editora Unesp (2009) e Heath, Thomas L. (1956). The Thirteen Books of Eudid's Elements. New York: Dover.). Desloca-se o $\triangle ABC$ sobre o $\triangle EFG$ de modo que o ponto A coincida com o ponto E e a semi-reta AB com a semi-reta EF. Como o ângulo $\widehat{A}$ é igual ao ângulo $\widehat{E}$, a semi-reta AC coincide com a semi-reta EG. Como $AB = EF$ e $AC = EG$, o ponto B coincide com Fe o ponto C com G. Logo $BC = FG$ e os ângulos B e C são iguais a F e G, respectivamente. Com isto, fita provado que os dois triângulos são congruentes, porque têm os três lados e os três ângulos respectivamente congruentes.

Acontece que esta demonstração padece de um defeito: o conceito de movimento não é introduzido antes por Euclides e também não há nada que garanta que ao movimentar-se, o triângulo não se deforma. Na verdade, o que se verificou é que é impossível provar esta proposição só com os axiomas de Euclides. Nesta unidade, estudaremos congruência de triângulos, mostrando que a solução encontrada para sanar o defeito apontado foi adotar este caso de congruência como axioma.

{item:7:2} ***Item 7.2.*** Examinando triângulos no modelo de Moulton. No modelo de Moulton, na figura abaixo, você está vendo dois triângulos congruentes? [A figura que parece um quadrado é um quadrado mesmo!]



Vejamos. Ambos são triângulos retângulos cujos catetos medem 1 e hipotenusa $\sqrt{2}$. Os três lados de um são iguais aos três lados do outro. Isto basta para concluir que os triângulos são congruentes? Não? Então calculemos os seus ângulos. São evidentes os ângulos de $90°$e os dois de $45°$, que têm vértice em $(1, 1)$, um em cada triângulo. Mas os ângulos que têm vértice em $(0, 0)$ têm medidas de Moulton diferentes. A medida de Moulton do ângulo a é a medida cartesiana do ângulo α', sendo $\operatorname{tg} \alpha' = 2$ ($\alpha' = 63,4°$, aproximadamente), enquanto que a medida de Moulton de β é $90°-a = 26,6°$,aproximadamente. Veja a figura abaixo. Você diria que os dois triângulos são iguais? Não, você exigiria que os seis elementos fundamentais (3 lados e 3 ângulos) dos triângulos fossem iguais.

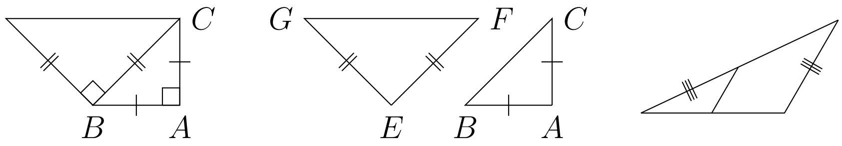


Item 7.3. Examinando triângulos na geometria euclidiana. Você acabou de ver, no modelo de Moulton, dois triângulos que têm 5 elementos fundamentais (3 lados e dois ângulos) de um iguais a 5 elementos fundamentais do outro, mas os triângulos não são congruentes. Você acha que isto pode acontecer no modelo cartesiano, dois triângulos tendo 5 elementos fundamentais de um iguais a 5 elementos fundamentais outro, mas os triângulos sendo diferentes? E com 4 elementos fundamentais iguais? E com 3? {item:7:3}

Com 3 é fácil: considere dois triângulos eqüiláteros, um de lado 1 e o outro de lado 2. Os três ângulos de um são iguais aos três ângulos do outro (60°), mas os dois triângulos não são iguais.

Com 4? Dois exemplos. Observe na figura abaixo, à esquerda (na figura do centro os triângulos estão separados): os dois triângulos têm os três ângulos respectivamente iguais ($A = E = 90°$e os outros $45°$) e um lado comum ($BC = EF$), mas os triângulos não são iguais. Com certeza você já ouviu falar em casos de congruência de triângulos, em que basta a igualdade de 3 elementos para garantir a congruência dos triângulos. O que está acontecendo aqui?

Para que um caso de congruência de triângulos funcione é preciso respeitar a posição relativa dos elementos que são iguais. É preciso que haja uma correspondência entre os vértices dos triângulos de modo que lados e ângulos correspondentes sejam iguais. Para os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$ da figura abaixo, deve-se ter $A \leftrightarrow E$, porque $\widehat{A} = \widehat{E} = 90°$ (a seta '$\leftrightarrow$' indica correspondente). Se escolhermos a correspondência $B \leftrightarrow F$ e $C \leftrightarrow G$, teremos $AB \leftrightarrow EF$ e $AC \leftrightarrow EG$, e deveríamos ter $AB = EF$, o que não acontece. A outra possibilidade ($B \leftrightarrow G$ e $C \leftrightarrow F$) também não dá. Em suma, não existe correspondência entre os vértices dos dois triângulos de modo que elementos correspondentes sejam iguais. Veja o outro exemplo da figura abaixo, à direita.



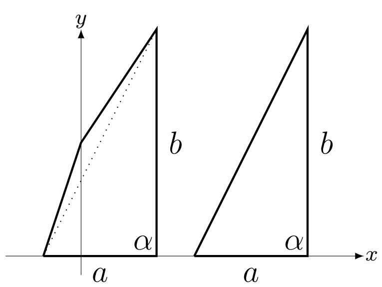
E com 5 elementos? Existe! Se você não conseguir um exemplo, olhe para o triângulo de lados 8, 12 e 18 e o outro triângulo de lados 12, 18 e 27. Como os seus lados são proporcionais, os três ângulos de um são iguais aos três ângulos do outro.

{item:7:4} ***Item 7.4.*** Definição de congruência de triângulos. Os exemplos anteriores mostram que se podem ter até cinco elementos fundamentais de um triângulo iguais a cinco elementos fundamentais de outro sem que os dois triângulos sejam congruentes. Portanto, a definição de congruência de triângulos deve demandar a igualdade dos seus seis elementos fundamentais. A definição enfatiza também a posição relativa dos seus elementos fundamentais, introduzindo os conceitos de lados e ângulos correspondentes.

Definição 7.1. *Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são congruentes se existe uma correspondência entre os vértices do primeiro e os vértices do segundo de modo que os ângulos correspondentes e os lados correspondentes são iguais. [Se a correspondência entre os vértices for $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$, o lado correspondente a AB é o lado $A'B'$ e o correspondente ao ângulo $\widehat{A}$ é o ângulo $\widehat{A}'$.] Notação: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.*

{item:7:5} ***Item 7.5.*** Com os axiomas atuais é possível provar a afirmação: Se $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e ângulo $A =$ ângulo A', então $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$? [Este é o chamado 1°caso de congruência de triângulos.]

Não. Para contra exemplo, veja a figura abaixo, no modelo de Moulton. São dois triângulos retângulos com catetos respectivamente iguais; porém as hipotenusas são diferentes.



Por que a prova dada por Euclides, descrita no item 1, falha aqui? A demonstração de Euclides usa o deslocamento de um triângulo sobre o outro, admitindo implicitamente que o triângulo não se deforma durante o deslocamento, de modo que os correspondentes elementos dos triângulos coincidem. Mas isto é falso no modelo de Moulton. Imagine, na figura acima, o triângulo da direita sendo transladado para a esquerda. Logo que o cateto horizontal cruza o eixo Oy, a hipotenusa do triângulo passa a ter comprimento diferente de quando o triângulo estava na posição inicial.
Já que é impossível provar o 1°caso de congruência de triângulos, se quisermos que isto aconteça temos que adotar um axioma que permita prová-lo. A experiência sugere adotar ele próprio como axioma.

Item 7.6. {item:7:6}
{axioma:congruenc

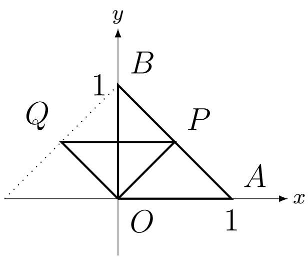
Axioma 10. ***Axioma de congruência de triângulos.*** *Se $AB = A'B'$, $AC = A'C'$e $\widehat{A} = \widehat{A}'$, então triângulo ABC é congruente ao triângulo $A'B'C'$.*

Item 7.7. O modelo de Moulton satisfaz o axioma de congruência de triângulos? {item:7:7}

Não. Contra-exemplo dado no item 5.

Item 7.8. O modelo do taxista satisfaz o axioma de congruência de triângulos? {item:7:8}

Não. Na figura abaixo está um contra-exemplo. No modelo do taxista, ângulos são medidos como no modelo cartesiano. Os triângulos $\triangle AOB$ e $\triangle POQ$ têm um ângulo reto, dois ângulos de 45°e os catetos iguais a 1. Porém as hipotenusas são diferentes: $AB = 2$ e $QP = 1$.



$A = (1, 0)$
$B = (0, 1)$
$P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$Q = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$O = (0, 0)$

$AB = 2$
$OA = 1$
$OB = 1$
$A\widehat{O}B = 90$
$QP = 1$
$OP = 1$
$OQ = 1$
$P\widehat{O}Q = 90$

Item 7.9. O modelo cartesiano satisfaz o axioma de congruência de triângulos? {item:7:9}

Sim

Item 7.10. O que é um caso de congruência de triângulos? {item:7:10}

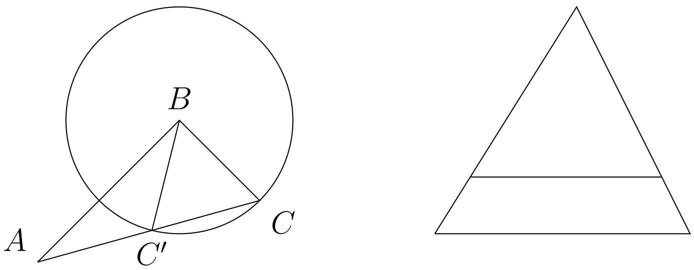
É uma afirmação verdadeira (axioma ou teorema) em que na hipótese aparece a igualdade entre três elementos (lados ou ângulos) de um triângulo e três elementos de outro triângulo e cuja tese é: *os dois triângulos são congruentes*.

{item:7:11} ***Item 7.11.*** Para que servem os casos de congruência de triângulos?

Para reduzir à metade o trabalho de provar que dois triângulos são congruentes.

{item:7:12} ***Item 7.12.*** São 6 combinações possíveis de igualdades entre os 3 lados (L) e os três ângulos (A): LAL, LLL, ALA, LAA, ALL e AAA. Nesta notação, a ordem das letras indica a posição relativa dos lados e ângulos que são dados como iguais. Quais delas são casos de congruência de triângulos?

As quatro primeiras são casos de congruência; as duas últimas não são. A segunda figura abaixo é contra-exemplo para AAA. A primeira é contra-exemplo para ALL. Os triângulos são ABC e ABC'. O ponto B é o centro da circunferência; C e C' estão na circunferência. Temos $A = A$, $AB = AB$ e $BC = BC'$, mas os triângulos não são congruentes.



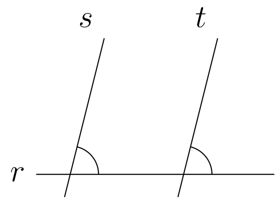
{item:7:13} ***Item 7.13.*** O caso LAL foí adotado como axioma. Os casos LLL, ALA e LAA são teoremas que podem ser provados a partir dos axiomas anteriores?

Sim; mas aqui está uma coisa importante para a seqüência do nosso curso: **nas demonstrações dos casos de congruência de triângulos não se usam os axiomas de paralelismo.** Deixamos a demonstração dos casos de congruência para a unidade seguinte.

{item:7:14} ***Item 7.14.*** Um teorema importante que não depende dos axiomas de paralelismo.

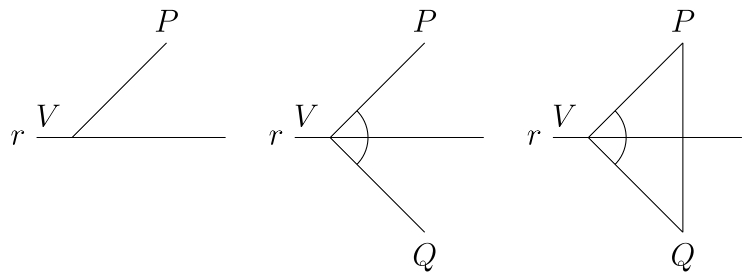
Teorema 7.1. ***Teorema dos ângulos correspondentes.*** *Se duas retas são cortadas por outra reta fazendo ângulos correspondentes iguais, então elas são paralelas.*

Como veremos, a demonstração deste lema não usa os axiomas de paralelismo. Ela será dada na próxima unidade. Os ângulos assinalados na figura são denominados ângulos correspondentes.



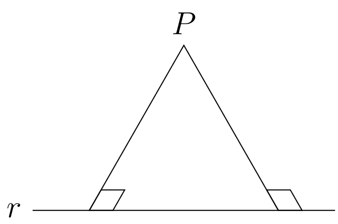
Item 7.15. *Conseqüências do axioma de congruência de triângulos para a existência e a unicidade de perpendicular a uma reta dada por um ponto fora da reta.* O axioma de congruência de triângulos é o que estava faltando para garantir a existência e a unicidade de perpendicular a uma reta dada por um ponto fora da reta. Como vimos no Roteiro **??**, no modelo de Moulton, a existência e a unicidade de perpendicular a uma reta dada por um ponto fora da reta não estão garantidas. O modelo de Moulton só não satisfaz o axioma de congruência de triângulos. {item:7:15}

Teorema 7.2. ***Teorema da perpendicular por um ponto fora de uma reta.*** *Por um ponto P fora de uma reta r, existe uma e somente uma perpendicular à reta.*

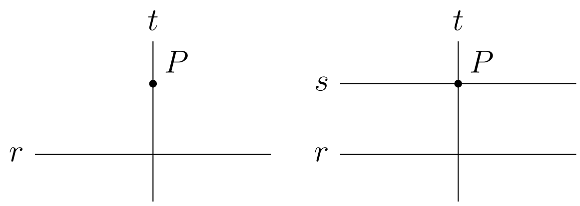


Demonstração da existência. As três figuras acima ilustram as construções feitas para chegar a uma reta PQ perpendicular à r. Começamos com uma reta r e um ponto P fora de r. Por P traçamos uma reta que corta r num ponto V. Se PV for perpendicular à r, já temos a perpendicular. Se não é, traçamos a semi-reta S_{VQ} de modo que faça com r um ângulo igual a que S_{VQ} faz com r. Aqui estamos usando a propriedade (ii) da definição de medida de ângulo. Além disto, o ponto Q pode ser tomado de modo que $VP = VQ$. Os dois triângulos da última figura são congruentes (caso LAL). Logo, os dois ângulos com vértice na interseção de r com PQ são iguais e, como a soma deles é $180°$, cada um mede $90°$. Portanto, PQ é perpendicular a r.

Demonstração da unicidade. Por absurdo, suponhamos que existam duas perpendiculares por P a r, como mostra a figura abaixo, à esquerda. Esta situação contraria o teorema dos ângulos correspondentes. Portanto, não podem existir duas perpendiculares a r por P.



{item:7:16} ***Item 7.16.*** *Revisão do axioma de existência de paralela a uma reta dada por um ponto fora da reta* (P_1). Como construir uma paralela a uma reta r dada, por um ponto P fora da reta?



A figura ilustra os dois passos da demonstração.

(1) Existe uma reta t perpendicular a r por P (teorema da perpendicular por um ponto fora da reta).

(2) Existe uma reta s perpendicular a t por P (existência de perpendicular a urna reta por um ponto da reta; Roteiro 6).

Pelo teorema dos ângulos correspondentes, s é paralela a r. Com isto, provamos o seguinte teorema:

Teorema 7.3. ***Teorema da existência de paralela.*** *Por um ponto fora de uma reta passa pelo menos uma paralela à reta.*

{item:7:17} ***Item 7.17.*** *O axioma de existência de paralela a uma reta dada por um ponto fora da reta* (P_1) *torna-se um teorema.* O teorema acima não é exatamente o axioma de existência de paralela (PI) enunciado no Roteiro 2?

Sim. Então acabamos de provar um axioma? Exatamente. O novo axioma tem força suficiente para provar o axioma P_1. Temos duas alternativas para corrigir este defeito: (1°) escolher um novo axioma para substituir o axioma de congruência de triângulos, que tenha força para prová-lo, mas que não tenha força para provar o axioma P_1; (2°) manter o axioma de congruência e retirar P_1; da lista, já que este pode ser-provado. A experiência sugere adotar esta última alternativa.

{item:7:18} ***Item 7.18.*** *Que conseqüência tem o axioma de congruência de triângulos para a unicidade de paralela?* Resposta: nenhuma. O axioma P_2 continua sendo um axioma.

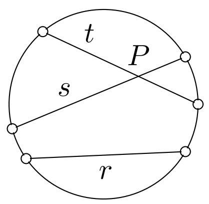
Examinemos a demonstração do teorema da existência de paralela, dada no item 16. Os mesmos teoremas aplicados lá garantem também a unicidade da reta t e, depois, da reta s. Logo, a paralela a r por P é única, certo? Errado! O que é que está errado? O raciocínio parece tão claro! Tente achar a falha, mas não gaste mais de 10 minutos com isto, pois ela é sutil. Veja a resposta mais na frente (item 19).

Item 7.19. Ao contrário do que aconteceu com a existência de paralela, a {item:7:19}
unicidade de paralela não pode ser provada. Como se prova que é impossível provar a unicidade de paralela?

Resposta: exibindo um modelo que satisfaz todos os axiomas, exceto o da unicidade de paralela. Um modelo para isto é introduzido a seguir (modelo de Klein).

Item 7.20. Um novo modelo: Modelo de Klein. {item:7:20}

No modelo cartesiano, tomemos a circunferência de centro na origem e raio 1. Um ponto do modelo de Klein é um ponto cartesiano do interior da circunferência. Uma reta é uma corda da circunferência, sem os extremos. Em particular, os diâmetros sem os extremos são retas deste modelo.



É fácil ver que os axiomas de incidência são satisfeitos. Como mostra a figura acima, o axioma de unicidade de paralela não está satisfeito. Pelo ponto P fora da reta r passam duas retas paralelas a r: s e t. A reta s é paralela a r porque r e s não têm ponto em comum. Vê-se também facilmente que o axioma de separação do plano está satisfeito.
O restante (axioma da régua, medida de ângulo e o axioma de congruência de triângulos) é mais difícil.
Introduziremos agora distância e deixaremos medida de ângulo e congruência de triângulos para depois.
A função $y = x/(a - x)$ é uma bijeção do intervalo $(0, a)$ no intervalo $(0, \infty)$. Como a função logarítmica é uma bijeção de $(0, \infty)$ em $(-\infty, \infty)$, a composta das duas:

$$f(x) = (1/2)ln(x/(a-x)),$$

é uma bijeção de $(0, a)$ em $(-\infty, \infty)$. Observemos que $0 < x_1 < x_2 < a$, implica $f(x_1) < f(x_2)$.

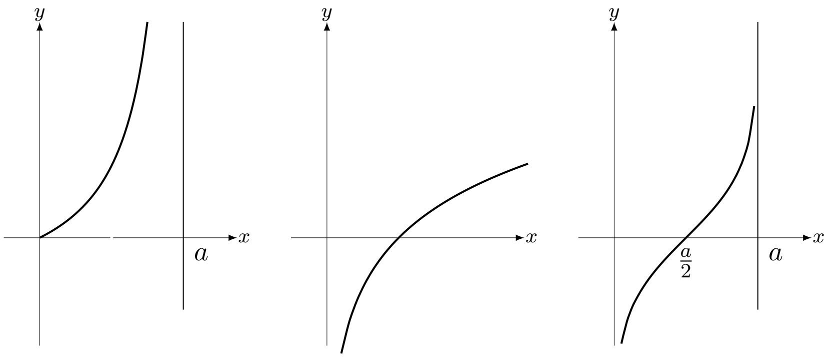
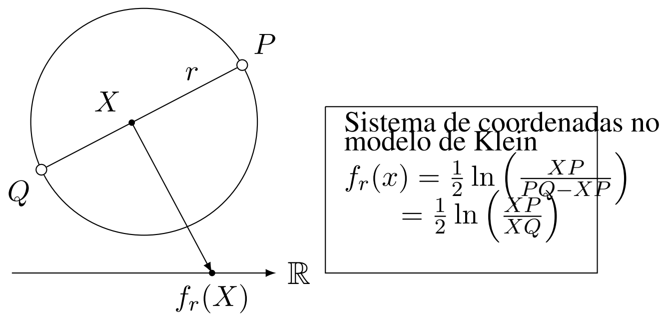


gráfico de $y = \frac{x}{x-a}$ gráfico de $y = \ln x$ gráfico de $y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{a-x}\right)$

Consideremos, agora, uma reta r no modelo de Klein, ou seja, uma corda PQ da circunferência, sem os extremos. O comprimento cartesiano desta corda será indicado por PQ. Definimos um sistema de coordenadas $f_r : r \to \mathbb{R}$ para r assim

$$f_r(X) = (1/2)\ln(XP/(PQ - XP)) = (1/2)\ln(XP/(XQ))$$

para cada ponto X de r. Esta fórmula deve ser comparada com a fórmula $f(x) = (1/2)\ln(x/(a-x)$, dada acima, sendo $a = PQ$ e $x = XP$, para se concluir que ela é uma bijeção entre a corda PQ, sem os extremos, e $\mathbb{R}$.



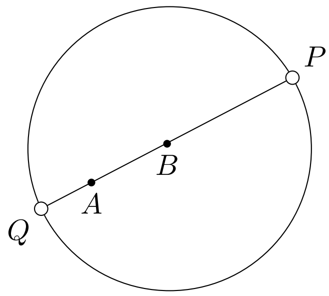
O ponto médio M do segmento cartesiano PQ é levado por f_r no número 0, pois $MP/MQ = 1$ e $\ln 1 = 0$. Observemos que a troca de posição entre os pontos P e Q acarreta uma troca de sinal de $f_r(X)$, já que $\ln(XQ/XP) = \ln(1/(XP/XQ) = \ln 1 - \ln(XP/XQ = -\ln(XP/XQ)$. O fator $1/2$ é introduzido na fórmula para se ajustar com a medida de ângulo que será definida depois, de modo que o axioma de congruência de triângulos seja satisfeito.

Agora definimos a distância de Klein, $d_K(A,B)$, entre dois pontos A e B de r por

$$d_K(A,B) = |f_r(A) - f_r(B)| = 1/2|\ln(AP/AQ) - \ln(BP/BQ) =$$
$$1/2|\ln(AP/AQ)/(BP/BQ)|$$

ou

$$d_K(A,B) = 1/2|\ln(AP \cdot BQ)/(AQ \cdot BP)|.$$



A troca de posição entre P e Q nesta fórmula só acarreta uma mudança de sinal na expressão entre as barras dos módulos e, portanto, não altera o seu valor. Com a distância assim definida, a reta de Klein r é ilimitada. Basta observar que, fixado o ponto A e fazendo B tender para P, teremos BQ tendendo para PQ, BP tendendo para zero, e a fração $AP \cdot BQ/(AQ \cdot BP)$ tendendo para infinito. Logo, $\ln(AP \cdot BQ/(AQ \cdot BP))$ e, conseqüentemente, $d_K(A,B)$, tenderá para infinito. Como dissemos antes, deixaremos a medida de ângulo e o axioma de congruência de triângulos para depois.

Item 7.21. {item:7:21}

A. A medida de segmento e a medida de ângulo foram introduzidas sem nenhuma relação entre si. O axioma de congruência de triângulos é que relaciona as duas medidas. Como se dá esta relação? Fixados os comprimentos de dois lados de um triângulo, o ângulo por eles formado determina o comprimento do terceiro lado. De fato, isto acontece nos modelos que satisfazem o axioma de congruência, como no modelo cartesiano; mas não acontece no modelo de Moulton (no qual não vale o axioma de congruência de triângulos) em que o comprimento do terceiro lado depende também da posição do triângulo (veja os triângulos da figura do item 5).

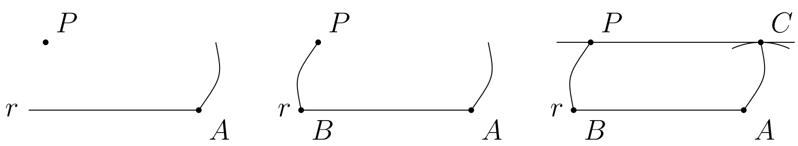
B. O axioma de congruência de triângulos é independente dos demais axiomas. Contra-exemplos são encontrados tanto no modelo de Moulton quanto no modelo do taxista.

C. **O axioma P_1, da existência de paralela, é retirado da lista de axiomas, já que ele pode ser provado a partir dos outros axiomas.**

D. O axioma P_2, da unicidade de paralela, é independente dos demais axiomas. O modelo de Klein é utilizado para provar este fato: ele satisfaz todos os axiomas, exceto P_2.

E. Neste roteiro, definimos distância de Klein entre dois pontos. A medida de ângulo (que será introduzida mais tarde neste curso) é feita de modo que se ajuste à medida de comprimento para que o axioma de congruência de triângulos seja satisfeito. A medida de ângulo será feita medindo outro ângulo cartesiano e, para isto precisamos de certos fatos da geometria euclidiana de que ainda não dispomos. Por esta razão é que adiamos a sua introdução.

F. Aqui está a explicação do fato de que a argumentação dada no item 16, de uma pretensa demonstração da unicidade de paralela, é falha. O que aquela argumentação prova é que o processo de construção lá utilizado, sempre que repetido, leva de fato à mesma paralela pelo ponto dado. Mas nada impede que outro tipo de construção de paralela leve à outra paralela. Por exemplo, a construção ilustrada na figura abaixo leva à reta PC paralela à reta r pelo ponto P. Como esta construção é diferente da construção do item 16, não está garantido que a reta PC coincide com a reta s daquela construção. No modelo de Klein, as duas construções podem levar a diferentes retas paralelas. Uma tentativa de demonstração seria por absurdo, mas não adianta tentar - é impossível provar, já que existe contra-exemplo no modelo de Klein.



G. Os modelos de Moulton e do taxista satisfazem todos os axioma da geometria euclidiana, exceto o de congruência de triângulos e, portanto são bons para mostrar a falta que faz o axioma de congruência de triângulos para provar vários teoremas da geometria euclidiana. Exemplos de alguns teoremas que não valem no Modelo de Moulton:

(a) os casos de congruência de triângulos;

(b) existência e unicidade de perpendicular a uma reta dada por um ponto fora da reta;

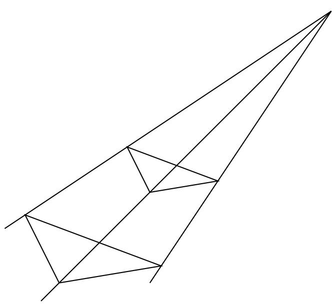
(c) qualquer triângulo tem que ter dois ângulos agudos e, portanto, só pode ter um ângulo reto;

(d) a soma dos ângulos de qualquer triângulo é igual a 180°[no modelo de Moulton existem triângulos com soma dos ângulos igual a 180°, menor que 180°e maior que 180°]. Isto chama a atenção para o fato de que este teorema não está ligado apenas ao axioma de paralelismo de Euclides (unicidade de paralela), mas depende também do axioma de congruência de triângulos;

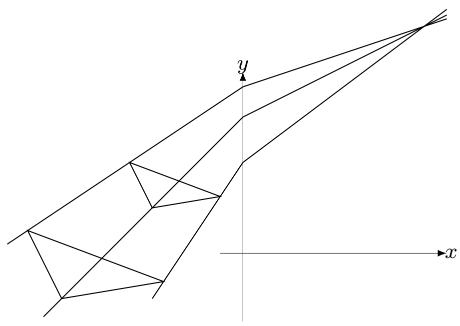
(e) qualquer lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois;

(f) os lados opostos e os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais.

(g) o teorema de Desargues ("as três retas que passam pelos vértices correspondentes de dois triângulos que têm lados paralelos se encontram num único ponto, a não ser que sejam paralelas") também é falso, na ausência do axioma de congruência de triângulos. Aliás, a motivação para a construção do modelo de Moulton, em 1902, foi exatamente a de mostrar que o axioma de congruência de triângulos é indispensável para a prova do teorema de Desargues, uma questão abordada por Hilbert rio- seu-livro "Fundamentos de Geometria", de 1899. Nas edições posteriores, Hilbert substituiu o seu exemplo pelo de Moulton.



Na geometria euclidiana



Falso, no modelo de Moulton

Se 2 retas euclidianas se intersecionam em um único ponto, (x_c, y_c), as 2 retas de Moulton com mesmos coeficientes também se intersecionam num único ponto, sendo $(2x_c, y_c)$.

7.2 Resumo

Objetos primitivos: *ponto* e *reta*.
Relação primitiva: [ponto] *pertence* a [reta] ("relação de incidência").
Relação definida: [ponto] está *entre* [dois pontos] ("relação de ordem").
Objetos definidos: *retas que se interceptam; retas paralelas; circunferência; interior e exterior de circunferência; segmento; triângulo; distância entre dois pontos; sistema de coordenadas para cada reta; reta separa plano; semi-plano; interior e exterior de triângulo, semi-reta, ângulo, interior de ângulo, medida de ângulo, perpendiculares, distância de ponto a reta, retas eqüidistantes.*
Modelos aniquilados com a introdução do axioma de congruência de triângulos: modelos finitos, modelo bizarro, modelo do taxista, modelo de Moulton.
Modelo persistente: modelo cartesiano.
Axiomas atuais: 3 de incidência, unicidade de paralela, axioma da régua, axioma de separação do plano, axioma de medida de ângulo, axioma de congruência de triângulos.

Definição. Dois triângulos são **congruentes** se os três lados e os três ângulos de um são iguais aos três lados e aos três ângulos do outro.

Axioma de congruência de triângulos. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos. Se $AB = A'B$, $AC = A'C'$ e $\widehat{A} = \widehat{A}'$, então $BC = B'C'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$, $\widehat{C} = \widehat{C}'$ e o triângulo ABC é congruente ao triângulo $A'B'C'$.

Teorema dos ângulos correspondentes. Se duas retas são cortadas por outra reta fazendo ângulos correspondentes iguais, então elas são paralelas.

Teorema dos ângulos alternos-internos. Se um par de ângulos alternos-internos formados por uma transversal com duas retas r e s são iguais, então r e s são paralelas.

Teorema Teorema da perpendicular por um ponto fora de uma reta. Por um ponto P fora de uma reta r, existe uma e somente uma perpendicular à reta.

Teorema Teorema da existência de paralela. Por um ponto fora de uma reta passa pelo menos uma paralela à reta.

7.3 Lista de Exercícios n. 7

A não ser que esteja explícito em contrário no enunciado do exercício, consideram-se em vigor todos os sete axiomas.

7.1. *Prove que o axioma de congruência de triângulos é de fato um axioma, ou seja, é independente dos demais.*

7.2. *Duas retas são cortadas por uma reta (que se costuma denominar de transversal). Mostre numa figura os ângulos correspondentes, os ângulos alternos-internos, os ângulos alternos-externos, os ângulos colaterais internos, os ângulos colaterais externos.*

7.3.

{teorema:alternos

Teorema 7.4. ***Teorema dos ângulos alternos-internos***. *Se os ângulos alternos-internos formados por uma transversal com duas retas r e s são iguais, então r e s são paralelas. Prove-o.*

7.4. *O axioma de congruência de triângulos é indispensável para a demonstração do Teorema dos ângulos alternos-internos?*

7.5. *Seja P um ponto fora de uma reta r. Existe perpendicular a r por P? É única? Qual é o papel do axioma de congruência de triângulos nestas questões?*

7.6. *O axioma P_1, da existência de paralela, é independente dos demais?*

7.7. *O axioma P_2, da unicidade de paralela, é independente dos demais?*

7.8. *No momento, qual é a utilidade do modelo de Klein?*

7.9. *A relação de congruência de triângulos é transitiva?*

7.10. AAA e ALL, *são casos de congruência de triângulos?*

7.4 Soluções da Lista de Exercícios n. 7

7.1. *Prove que o axioma de congruência de triângulos é de fato um axioma, ou seja, é independente dos demais.*

Resposta:
Tome contra-exemplo no modelo de Moulton ou do taxista, como mostra o Roteiro 7, itens 5 e 8.

7.2. *Duas retas são cortadas por uma reta (que se costuma denominar de transversal). Mostre numa figura os ângulos correspondentes, os ângulos alternos-internos, os ângulos alternos-externos, os ângulos colaterais internos, os ângulos colaterais externos.*

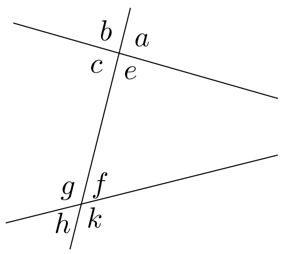
Resposta:
Correspondentes: a, f; e, k; b, g; c, h.

Alternos-internos: e, g; c, f.

Alternos-externos: a, h; b, k.

Colaterais-internos: c, g; e, f.

Colaterais-externos: a, k; b, h.



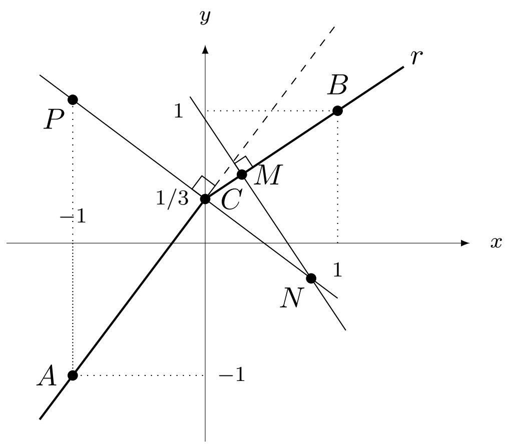
lternos:internos} **7.3.**

Teorema 7.5. ***Teorema dos ângulos alternos-internos***. *Se os ângulos alternos-internos formados por uma transversal com duas retas r e s são iguais, então r e s são paralelas. Prove-o.*

Resposta:
A demonstração é feita por absurdo e faz uso do Axioma de congruência,de triângulos. Veja o Roteiro 7.

7.4. *O axioma de congruência de triângulos é indispensável para a demonstração do Teorema dos ângulos alternos-internos?*

Resposta:
Sim. Basta construir um contra-exemplo em que estão presentes todos os axiomas, exceto o de congruência de triângulos, no qual não vale o lema dos ângulos alternos-internos. No modelo de Moulton, tome duas perpendiculares a uma reta quebrada que não são paralelas. As retas MN e PN fazem com a reta r ângulos alternos-internos iguais (retos), mas não são paralelas (figura abaixo). O modelo de Moulton satisfaz todos os axiomas, exceto o de congruência de triângulos. Se o Teorema dos ângulos alternos-internos dependesse apenas dos outros axiomas, ele seria válido no modelo de Moulton.



7.5. *Seja P um ponto fora de uma reta r. Existe perpendicular a r por P? É única? Qual é o papel do axioma de congruência de triângulos nestas questões?*

Resposta:
Na presença do axioma de congruência de triângulos, vale a existência e a unicidade. Veja o item 15 do Roteiro 7. Sem esse axioma, não vale a existência nem a unicidade. Veja o item 19 do Roteiro 6A.

7.6. *O axioma P_1, da existência de paralela, é independente dos demais?*

Resposta:
Não. Veja a demonstração de P_1 no item 14 do Roteiro 7. Sendo assim, P_1 muda de status: passa a ser um teorema.

7.7. *O axioma P_2, da unicidade de paralela, é independente dos demais?*

Resposta:
Sim. Para provar que P_2 é independente dos demais axiomas, é preciso exibir um modelo em que valem todos os axiomas, exceto P_2. O modelo de Klein tem essas características. Veja o item 20 do Roteiro 7, onde se encontra uma reta de Klein e um ponto fora da reta pelo qual passam duas paralelas á reta.

7.8. *No momento, qual é a utilidade do modelo de Klein?*

Resposta:

No momento,. o modelo de Klein é utilizado apenas para mostrar que P_2 é independente dos demais axiomas.

7.9. *A relação de congruência de triângulos é transitiva?*

Resposta:

Sim.

7.10. AAA *e* ALL*, são casos de congruência de triângulos?*

Resposta:

Veja o item 12, do Roteiro 7.

Capítulo 8

Geometria Neutro

{roteiro:8}

8.1 Roteiro 8. Geometria Neutro: a força do axioma de congruência de triângulo

Item 8.1. O que é geometria neutra? {item:8:1}

É a geometria constituída de todos os teoremas que se pode provar utilizando os axiomas de incidência, o axioma da régua, o axioma de separação do plano, o axioma do transferidor e o axioma de congruência de triângulos. Excetuam-se, portanto, os axiomas de paralelismo.

Item 8.2. Por que é interessante estudar a geometria neutra? {item:8:2}

Por duas razões. A primeira é histórica. O enunciado do quinto postulado (um enunciado diferente, mas equivalente ao de unicidade de paralela) de Euclides (que aparece na sua obra "Os Elementos", escrita aproximadamente em torno do ano 300 antes de Cristo), é muito mais complicado do que os outros quatro axiomas. Além disso, Euclides adiou o seu uso até a Proposição de número 28, como se recusasse a utilizá-lo enquanto fosse possível. Isto levou os matemáticos das gerações seguintes à tentativa de demonstrar o quinto postulado. Este problema - a demonstração do postulado das paralelas a partir dos outros axiomas - foi o mais resistente da história da matemática. Somente depois de mais de dois mil anos é que se chegou à conclusão de que é impossível prová-lo a partir dos outros axiomas.

A outra razão para destacar a geometria neutra é que o nosso curso estuda, além da geometria euclidiana, a geometria hiperbólica também. O que faz a diferença da geometria hiperbólica para a geometria euclidiana é o axioma de paralelismo de cada uma delas. Na geometria euclidiana adota-se o axioma de unicidade de paralela a uma reta por um ponto fora da reta. Na geometria hiperbólica, adota-se a negação daquele: por um ponto fora de uma reta passam mais de uma paralela à reta. Todos os outros axiomas são comuns às duas geometrias. Estes são os axiomas da geometria neutra.

{item:8:3} ***Item 8.3.*** O que é a geometria euclidiana?

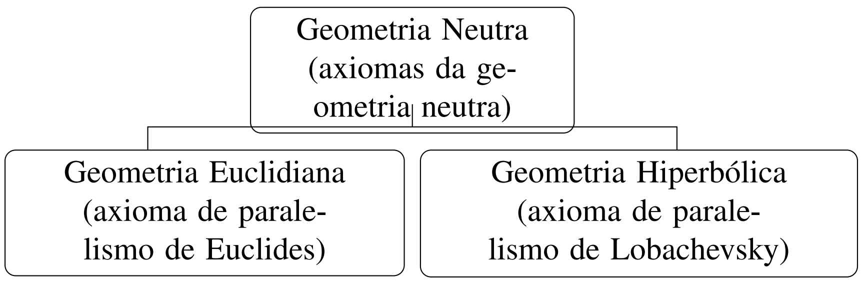
A geometria euclidiana é constituída de todos os teoremas da geometria neutra, mais os teoremas que se podem provar ao acrescentar o axioma de paralelismo de Euclides (uma única paralela a uma reta dada por um ponto fora da reta).

{item:8:4} ***Item 8.4.*** O que é geometria hiperbólica ou geometria de Lobatchevsky?

A geometria hiperbólica é constituída de todos os teoremas da geometria neutra, mais os teoremas que se podem provar ao acrescenta o axioma de paralelismo de Lobatchevsky (mais de uma paralela a uma reta dada por um ponto fora da reta).

{item:8:5} ***Item 8.5.*** Como se relacionam as geometrias neutra, euclidiana e hiperbólica?

O diagrama seguinte ilustra a relação entre as três geometrias.



A *existência* de pelo menos uma paralela a uma reta dada por um ponto fora da reta é um teorema da geometria neutra. A questão da unicidade de paralela é *indecidível* na geometria neutra: não se pode provar que a paralela é única, nem que existe mais de uma. Por isto, há a possibilidade de duas geometrias distintas situadas no mesmo pé de igualdade do ponto de vista lógico, uma delas adotando um axioma de paralelismo e a outra geometria adotando a sua negação.
Assim, todos os teoremas da geometria neutra são também teoremas destas duas geometrias. Já os teoremas que necessitam do axioma de paralelismo de Euclides são exclusivos da geometria euclidiana; coisa análoga acontece com os teoremas da geometria de Lobatchevsky. Nesta unidade estudaremos a geometria neutra. Nas unidades seguintes estudaremos as geometrias euclidiana e hiperbólica.

{item:8:6} ***Item 8.6.*** Neste roteiro, quais são os teoremas da geometria neutra cujos enunciados são idênticos aos das geometrias euclidiana e hiperbólica?

São os seguintes:

(a) Os **casos de congruência de triângulos**.

(b) **Teorema do triângulo isósceles**. Se dois lados de um triângulo são iguais, então os seus dois ângulos opostos são iguais.

(c) **Teorema do triângulo escaleno**. Se dois lados de um triângulo são diferentes, ao maior lado opõe-se o maior ângulo e reciprocamente.

(d) **Teorema da desigualdade triangular**. Qualquer lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois.

(e) **Teorema da desigualdade de dois triângulos**. Sejam ABC e $A'BC'$ dois triângulos. Se $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $\widehat{A} > \widehat{A}'$, então $BC > B'C'$.

Item 8.7. Neste roteiro, quais são os teoremas da geometria neutra cujos enunciados são diferentes dos correspondentes nas geometrias euclidiana e hiperbólica? {item:8:7}

São os seguintes:

(a) **Teorema do ângulo externo.** Um ângulo externo de um triângulo é maior que cada um dos ângulos internos não adjacentes.

(b) **Teorema da soma de dois ângulos de um triângulo**. A soma de dois ângulos quaisquer de um triângulo é < 180°.

(c) **Teorema da soma dos três ângulos de um triângulo**. A soma dos ângulos de .um triângulo é < 180°.

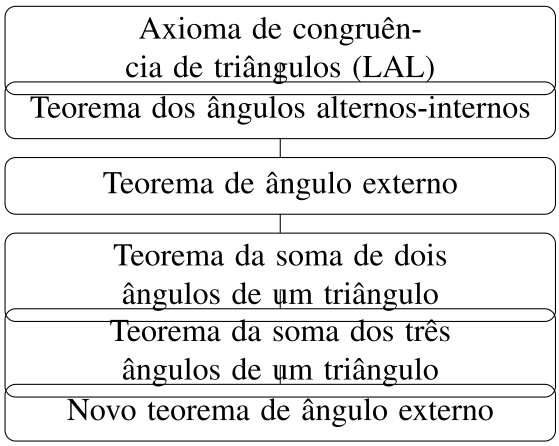
(d) **Novo teorema do ângulo externo**. Um ângulo externo é de um triângulo é maior que ou igual à soma dos ângulos internos não-adjacentes α e β: $\delta > \alpha + \beta$.

Embora estes teoremas sejam verdadeiros também nas geometrias euclidiana e hiperbólica, os seus enunciados assumem formas mais informativas e específicas em cada uma delas.
Na geometria euclidiana, os quatro teoremas se resumem a três: "Um ângulo externo é igual a sorna dos ângulos internos não-adjacentes", A soma de dois ângulos quaisquer de um triângulo é < 180°"e "A soma dos ângulos de um triângulo é 180°".
Na geometria hiperbólica os teoremas são: "Um ângulo externo é maior que a soma dos ângulos internos não-adjacentes"e "A soma dos ângulos de um triângulo é <180°".

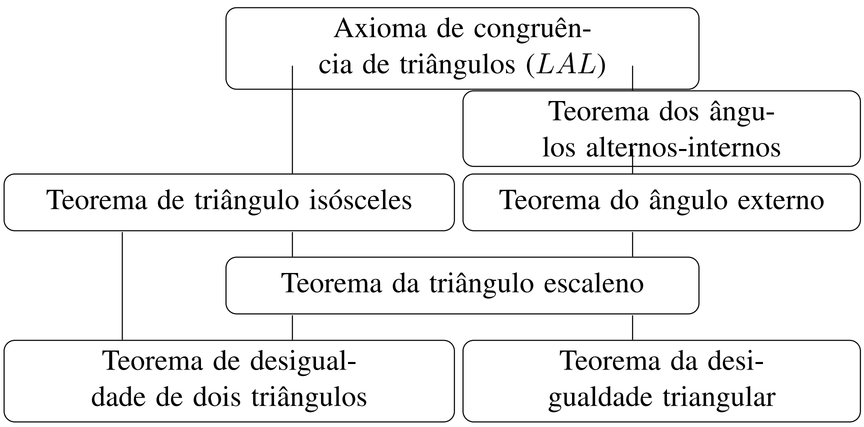
Item 8.8. Que teorema da geometria neutra tem recíproca indecidível na geometria neutra, que é verdadeira na geometria euclidiana e falsa na geometria hiperbólica? {item:8:8}

Aqui está um:
Teorema dos ângulos alternos-internos. Se um par de ângulos alternos-internos formados por uma transversal com duas retas r e s são iguais, então r e s são paralelas.
A recíproca deste teorema - Se r e s são retas paralelas, então os ângulos alternos-internos formados por uma transversal com r e s são iguais - é **verdadeira** na geometria euclidiana e **falsa** na geometria hiperbólica.

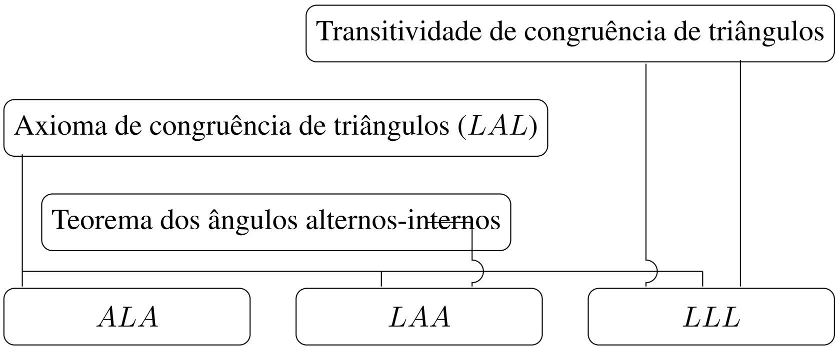
{item:8:9} ***Item 8.9.*** As hierarquias dos teoremas deste roteiro.



O teorema do ângulo externo diz respeito a ângulos de triângulo. Os teoremas decorrentes dele exprimem relações entre ângulos de um triângulo. O diagrama abaixo mostra a hierarquia desses teoremas.



Todos os casos de congruência de triângulos (ALA, LLL e LAA) dependem diretamente do axioma de congruência de triângulos. Na demonstração dos casos ongruencia} LAA e LLL usa-se a transitividade da relação de congruência de triângulos. Além desta, o caso LAA depende também do teorema dos ângulos alternos-internos. Veja o diagrama abaixo.

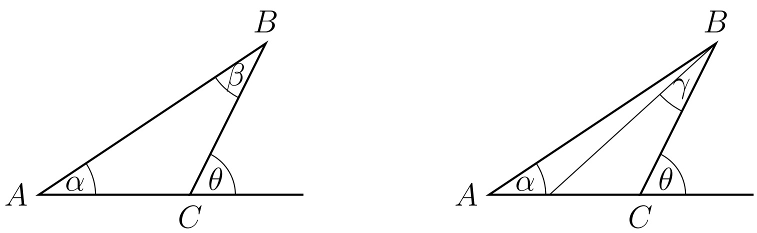


No fim deste roteiro apresentamos um diagama completo mostrando a hierarquia de todos os teoremas e apontando alguns teoremas de unidades anteriores que participam de suas demonstrações.
Começamos com a seqüência de teoremas que tratam das relações entre os ângulos de um triângulo. A lista começa com o teorema do ângulo externo e termina com uma versão mais informativa deste mesmo teorema, que denominamos de novo teorema do ângulo externo. O teorema mais destacado desta seqüência é o que trata da soma dos três ângulos de úm triângulo. O teorema dos ângulos alternos-internos foi demonstrado no Roteiro 7.

Item 8.10. {item:8:10}
{teorema:angulo:e

Teorema 8.1. ***Teorema do ângulo externo***. *Um ângulo externo de um triângulo é maior que cada um dos ângulos internos não adjacentes.*

Demonstração. Vamos mostrar que $\theta > \beta$ (veja a figura abaixo). A demonstração de que $\theta > \alpha$ é feita de maneira análoga, tomando-se para ângulo externo o oposto a θ pelo vértice C. Procedemos por absurdo: a negação de $\theta > \beta$ é $\theta \leq \beta$.



(1) Caso em que $\theta = \beta$. Pelo Teorema dos ângulos alternos-internos AB deveria ser paralela a AC, o que não acontece aqui. Absurdo.

(2) Caso em que $\gamma = \theta$. Construímos um ângulo = O, como mostra a segunda figura. Como $\gamma < \beta$, a semi-reta tracejada está no interior do ângulo β (Proposição G, Roteiro 6B). Será que esta semirreta corta o lado AC, como a figura indica? Sim, como garante o Teorema da semirreta do interior de um triângulo. Sendo assim, novamente o Teorema dos ângulos alternos-internos é contrariado. Absurdo.

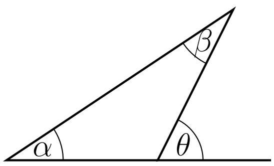
□

{item:8:11}
a:soma:2:angulos}

Item 8.11.

Teorema 8.2. ***Teorema da soma dos três ângulos de um triângulo***. *A soma dos ângulos de um triângulo é < 180°.*

Demonstração. Sejam α e β ângulos internos de um triângulo e seja θ um ângulo externo adjacente a α. Então, pelo Teorema-do ângulo externo, tem-se $\beta < \theta$, donde $\alpha + \beta < \alpha + \theta = 180$ (figura abaixo). □

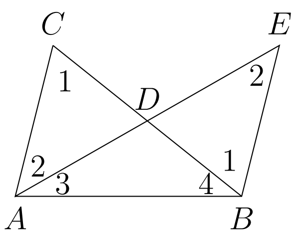


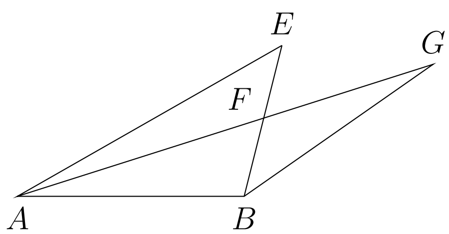
{item:8:12}
a:soma:3:angulos}

Item 8.12.

Teorema 8.3. ***Teorema da soma dos três ângulos de um triângulo***. *A soma dos ângulos de um triângulo é < 180°.*

Demonstração. É interessante observar que não se consegue provar, na geometria neutra, nem que a soma é < 180°, nem que é = 180°. Não se consegue provar que é < 180°, porque no modelo cartesiano a soma é = 180°; nem que é = 180°, porque no modelo de Klein a soma é $< 180°$. Ambos são modelos para a geometria neutra também (tente entender isto!). A demonstração é, pois, por absurdo: supomos que a soma é > 180, ou seja, $180 + p$, sendo $p > 0$.





Sobre o lado AB do triângulo $\triangle ABC$ construímos um triângulo $\triangle ABE$, tomando o ponto médio D de BC e tomando DE no prolongamento de AD de modo que $DE = AD$. Assim procedendo, obtemos dois triângulos iguais, pelo caso LAL: $\triangle ADC = \triangle BDE$. Daqui resulta que os dois ângulos restantes que se correspondem nos dois triângulos, indicados pelos números 1 e 2, são iguais. No $\triangle ABE$ ressaltamos os ângulos 3 e 4, apenas para mostrar que a soma dos ângulos dos dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABE$ são iguais: $\widehat{1}+\widehat{2}+\widehat{3}+\widehat{4}$. Ou seja, a soma dos ângulos do novo triângulo é a mesma do triângulo original: $180 + p$.
Uma observação importante agora é que, como $\widehat{2}+\widehat{3} = \widehat{A}$, tem-se $\widehat{2} < (1/2)\widehat{A}$ ou $\widehat{3} < (1/2)\widehat{A}$. Ou seja, a partir de um triângulo $\triangle ABC$ é possível construir um novo triângulo $\triangle ABE$ sendo um dos seus ângulos de medida $\leq (1/2)\widehat{A}$, mantendo a soma dos seus ângulos igual a $180 + p$.
Admitindo que o ângulo A do- novo triângulo $\triangle ABE$ é $\leq$ que a metade do ângulo $\widehat{A}$ do triângulo inicial, este processo pode ser repetido para se obter um novo triângulo $\triangle ABG$ (como mostra a figura à direita), cuja soma dos ângulos também é $180 + p$ e que tem um ângulo $\leq (1/2)(1/2) = (1/4)\widehat{A}$. Obtemos então uma sucessão de triângulos cuja soma dos ângulos é $180+p$ com um ângulo 5 $(1/2)\widehat{A}$, $(1/4)\widehat{A}$, $(1/8)\widehat{A}$, $(1/2^n)\widehat{A}$, . Para n suficientemente grande, tem-se $(1/2^n)\widehat{A} < p$. Sejam α, β e γ os ângulos deste triângulo, sendo $\alpha < p$. Então,

$$\alpha + \beta + \gamma = 180 + p,\ \beta + \gamma = 180 + (p - a),\ \text{donde}$$
$$p+ > 180,\ \text{porque}\ p - \alpha > 0,$$

o que contraria o teorema da soma de dois ângulos de um triângulo. Absurdo. □

Item 8.13. {item:8:13}
{teorema:angulo:e

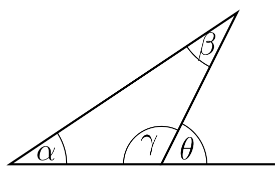
Teorema 8.4. ***Novo teorema do ângulo externo***. *Um ângulo externo θ de um triângulo é maior que ou igual à soma dos ângulos internos não-adjacentes α e β:*

$$\theta \geq \alpha + \beta$$

Demonstração. Decorre das expressões abaixo:

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 180^o$$

□

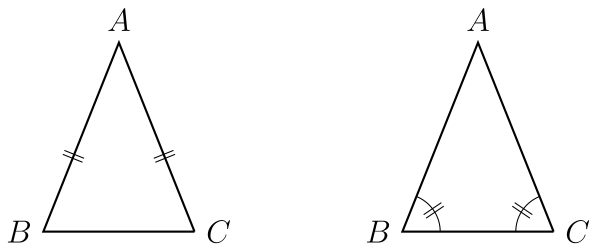


Os teoremas seguintes tratam das relações entre lados e ângulos de um triângulo. O mais simples deles é o teorema do triângulo isósceles. O mais importante é o teorema da desigualdade triangular, que dar uma relação entre os três lados de um triângulo.

{item:8:14} ***Item 8.14.***
eorema:isosceles}

Teorema 8.5. ***Teorema do triângulo isósceles****. Se dois lados de um triângulo são iguais, então os seus dois ângulos opostos sãó iguais.*

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo com $AB = AC$. A demonstração parece um malabarismo. Consiste em comparar o $\triangle ABC$ com o $\triangle ACB$, que são os mesmos triângulos, entendendo, porém que a ordem das letras indica os vértices correspondentes e, assim, que ângulos e que lados são iguais. $\square$



Hipótese: os lados são iguais   Tese: os ângulos são iguais

Abaixo, indicamos quais são os elementos de um triângulo que são iguais aos do outro,

$$\triangle ABC = \triangle ACB$$
$$AB = AC$$
$$\widehat{A} = \widehat{A}$$
$$AC = AB$$

satisfazendo, pois, a hipótese do caso LAL. Logo, os dois triângulos são congruentes, acarretando que os ângulos opostos aos lados iguais são iguais.
A recíproca do teorema do triângulo isósceles é verdadeira e fica como exercício.

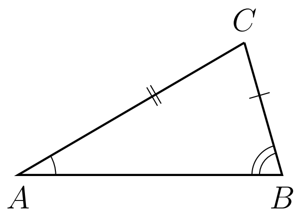
{item:8:15} ***Item 8.15.*** Como você prova que o axioma de congruência de triângulos é indispensável para provâr ó Teorema do triângulo isósceles?

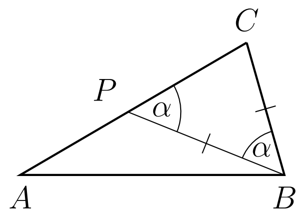
Resposta: Dando um contra-exemplo no modelo de Moulton, que satisfaz todos os axiomas exceto o de congruência de triângulos. No item 2 do Roteiro 7 aparece um triângulo isósceles em que os ângulos opostos aos lados iguais são diferentes (45°e 63,4°).

{item:8:16} ***Item 8.16.***

a:escaleno}

Teorema 8.6. ***Teorema do triângulo escaleno***. *Se dois lados de um triângulo são diferentes, ao maior lado opõe-se o maior ângulo e reciprocamente.*



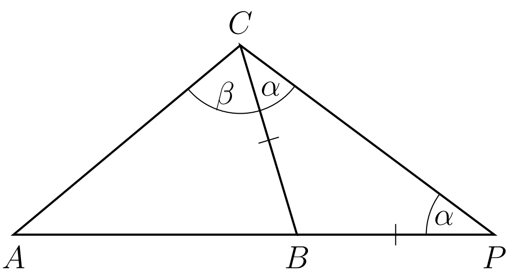


Demonstração. No triângulo $\triangle ABC$, por hipótese, temos $AC > BC$. Queremos mostrar que $\widehat{B} > \widehat{A}$. Tomamos P no lado AC de modo que $CP = CB$. Pelo Teorema do triângulo isósceles, os dois ângulos indicados com a mesma letra a são iguais. O Teorema do ângulo externo aplicado ao $\triangle ABP$, mostra que $\alpha > \widehat{A}$. Como o ponto P está no interior do ângulo $\widehat{B}$, temos $\widehat{B} > \alpha$. Logo, $\widehat{B} > \widehat{A}$.
Para a recíproca, suponhamos que $\widehat{B} > \widehat{A}$. Queremos mostrar que $AC > BC$. Por absurdo, neguemos esta tese: se for (a) $AC = BC$, teremos $\widehat{B} = \widehat{A}$, pelo Teorema do triângulo isósceles; (b) se for $AC < BC$, teremos, pela primeira parte da demonstração, $\widehat{B} < \widehat{A}$. Em qualquer caso, obtemos uma contradição. □

Item 8.17. {item:8:17}

{teorema:desiguald

Teorema 8.7. ***Teorema da desigualdade triangular***. *Qualquer lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois.*



Demonstração. Seja o triângulo ABC. Para mostrar que, por exemplo, $AC < AB + BC$, construímos $AP = AB + BC$ (o que se obtém tomando $BP = BC$, na ordem $A * B * P$) e vamos aplicar aplicamos o Teorema do triângulo escaleno ao $\triangle ACP$. Como B está no interior do ângulo $A\widehat{C}P$, temos $A\widehat{C}P = \beta + \alpha > \alpha = \widehat{P}$. Disto decorre que $AC < AP = AB + BC$.
Como você prova que o axioma de congruência de triângulos é indispensável para este último teorema? □

Contra-exemplo no modelo de Moulton: $\triangle ABC$, sendo $A = (-1,-1)$, $B = (0,0)$ e $C = (1,1)$. Tem-se $AC > AB + BC$ (veja o item 14, do Roteiro 6A).

Item 8.18. {item:8:18}

a:desigualdade:2}

Teorema 8.8. *Teorema da desigualdade de dois triângulos. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos. Se $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $\widehat{A} > \widehat{A}'$, então $BC > B'P'$.*

Demonstração. São dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, sendo $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $\widehat{A} > \widehat{A}'$. A tese é $BC > B'C'$. A idéia é construir um triângulo igual ao triângulo $\triangle A'B'C'$, cujos vértices denotaremos pelas mesmas letras A', B' e C', de modo que $A'B'$ coincida com AB, como mostram as figuras. As figuras ilustram as três situações possíveis, de acordo com as medidas de $\widehat{B}$ e $\widehat{B}'$: $\widehat{B} = \widehat{B}'$, $\widehat{B} > \widehat{B}'$ e $\widehat{B} < \widehat{B}'$. Em qualquer caso, C' está no interior de $\widehat{A}$, pois $\widehat{A}' < \widehat{A}$.

No caso em que $\widehat{B} = \widehat{B}'$, o ponto C' está entre B e C, logo $BC > B'C'$.

No caso em que $\widehat{B} > \widehat{B}'$, o ponto C' está no interior do $\widehat{B}$ e, portanto a semi-reta S_{BC} corta AC num ponto P, pelo Lema da semi-reta do interior de um triângulo. A idéia é mostrar que, no $\triangle BCC'$, temos $B\widehat{C}'C > B\widehat{C}C'$, para concluir que $BC > B'C'$, pelo Lema do triângulo escaleno. Obtemos isto com a seqüência de implicações para $B\widehat{C}'C$:

Inserido enumerador

(a) $> P\widehat{C}C'$ (teorema do ângulo externo no $\triangle PCC'$)

(b) $= A\widehat{C}'C$ ($\triangle ACC'$ é isósceles, pela hipótese)

(c) $> P\widehat{C}'C$ (P está no interior do $A\widehat{C}'C$))

(d) $> BC\widehat{C}'$ (teorema do ângulo externo no $\triangle BCC'$

Finalmente, no caso em que $\widehat{B} < \widehat{B}'$, o ponto C está no interior do ângulo $\widehat{B}'$ e a semi-reta S_{BC} corta AC' num ponto Q, pelo Teorema da semi-reta do interior de um triângulo. Como C' está no interior do $\widehat{A}$, então Q também está e daí Q está entre B e C. Agora, mostraremos que $B\widehat{C}'C > BC\widehat{C}'$, para concluir $BC > B'C'$, pelo Lema do triângulo escaleno. Temos os seguintes fatos sobre $B\widehat{C}'C$:

Inserido enumerador

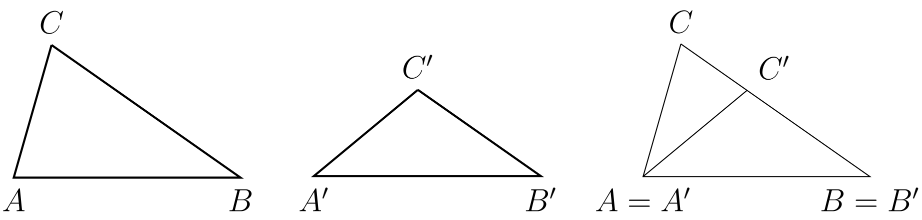
(i) $> A\widehat{C}'C$ (Q está no interior do $B\widehat{C}'C$)

(ii) $= A\widehat{C}C'$ ($\triangle ACC'$ é isósceles)

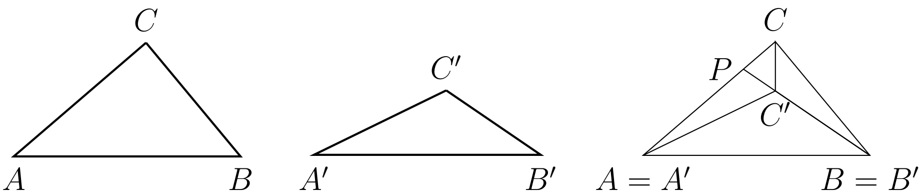
(iii) $> B\widehat{C}C'$ (Q está no interior do $B\widehat{C}C'$)

Isto conclui a demonstração do teorema. □

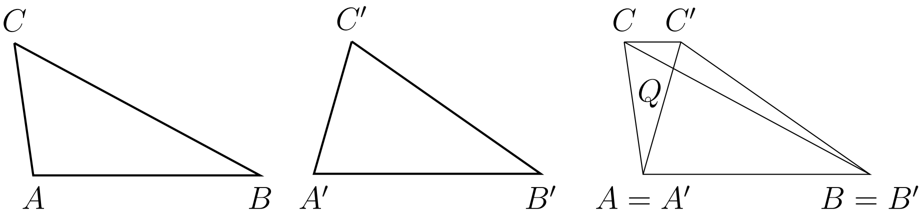
Caso $\widehat{B} = \widehat{B}'$



Caso $\widehat{B} > \widehat{B}'$



Caso $\widehat{B} < \widehat{B}'$



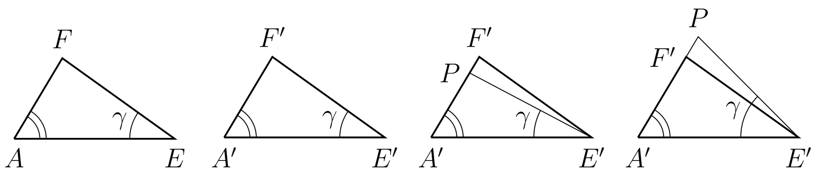
Caso.... text positions

Finalmente, abordaremos os casos de congruência de triângulos, que constituem um grupo de teoremas que não são utilizados para provar os outros teoremas deste roteiro.

Item 8.19. **2°caso de congruência de triângulos:** ALA. {item:8:19}
Hipótese: $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{E} = \widehat{E}'$, $AE = A'E'$. Tese: $\triangle AEF = \triangle A'E'F'$.

Demonstração. Estratégia: construir sobre o $\triangle A'E'F'$ um triângulo congruente ao $\triangle AEF$.

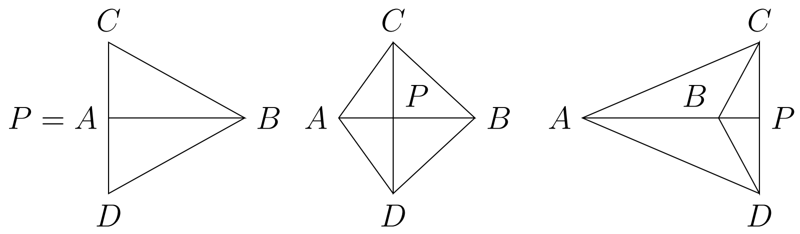
$\widehat{A} = \widehat{A}'$ $\quad AE = A'E'$ $\quad \widehat{E} = \widehat{E}'$ $\qquad A'P = A'F'$



Tomamos na semi-reta $A'F'$ um ponto P de modo que $A'P = AF$. (A posição do ponto P pode ser uma das duas indicadas na figura acima, mas a argumentação

não precisa ser separada.) Pelo caso LAL, temos $AA'E'P = AAEF$. Pela transitividade de congruência de triângulos, a demonstração ficará concluída se provarmos que $\triangle A'E'P = \triangle A'E'F'$. É o que faremos em seguida.
Como os pontos P e F' estão do mesmo lado de $A'E'$ e $y = E = E'$, a semi-reta $E'P$ coincide com a semi-reta $E'F'$, pela propriedade (ii) da definição de medida de ângulo. Isto implica que $F' = P$. Isto prova que $\triangle A'E'P = \triangle A'E'F'$, concluindo a demonstração. □

{item:8:20} ***Item 8.20.*** **3°caso de congruência de triângulos:** LLL.
Hipótese: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $BC = B'C'$. Tese: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

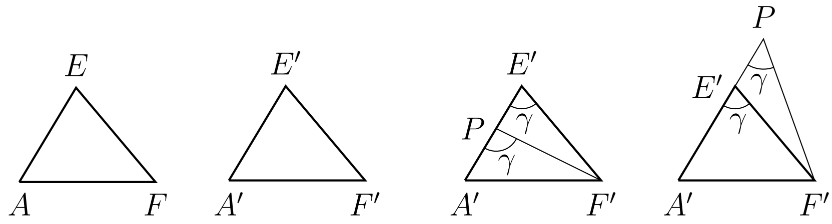


Demonstração. No semiplano definido pela reta AB que não contém o ponto C, construímos um triângulo $\triangle ABD$ igual ao triângulo $\triangle A'B'C'$ (que não aparece na figura acima). Construímos a semi-reta AD de modo que $C\widehat{A}B = D\widehat{A}B$, tomamos $AD = A'C'$ e ligamos D a B. Os dois ângulos com vértice em A são construídos iguais, depois tomamos $AD = AC$ e ligamos D a B. Que $AABD = AA'B'C'$ decorre do caso LAL; donde se obtém $BD = B'C' = BC$. Agora o que se tem a fazer é mostrar que $\triangle ABC = \triangle ABD$, pois assim teremos $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ por transitividade. E para mostrar que $\triangle ABC = \triangle ABD$, basta mostrar que $A\widehat{C}B = A\widehat{D}B$.
Observamos que o segmento CD corta a reta AB num ponto P. As figuras ilustram as possíveis situações decorrentes da posição de P em relação aos pontos A e B. A primeira situação é o caso em que P coincide com um dos extremos de AB. Neste caso, o Teorema do triângulo isósceles garante que $\triangle ACB = \triangle ADB$. Na segunda situação, aplicamos o Teorema do triângulo isósceles a cada um dos triângulos isósceles da figura e concluímos que cada um dos ângulos $\triangle ACB$ e $\triangle ADB$ é a soma de ângulos iguais e, portanto, são iguais. Na última situação, cada um dos ângulos $\triangle ACB$ e $\triangle ADB$ é a diferença de dois ângulos iguais, pelo Lema do triângulo isósceles, e, portanto, são também iguais. □

{item:8:21} ***Item 8.21.*** **4°caso de congruência de triângulos:** LAA.
Hipótese: $AF = A'F'$, $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{E} = \widehat{E}'$.
Tese: $\triangle AEF = \triangle A'E'F'$.

Demonstração. Estratégia: construir sobre o $\triangle A'E'F'$ um triângulo congruente ao $\triangle AEF$.

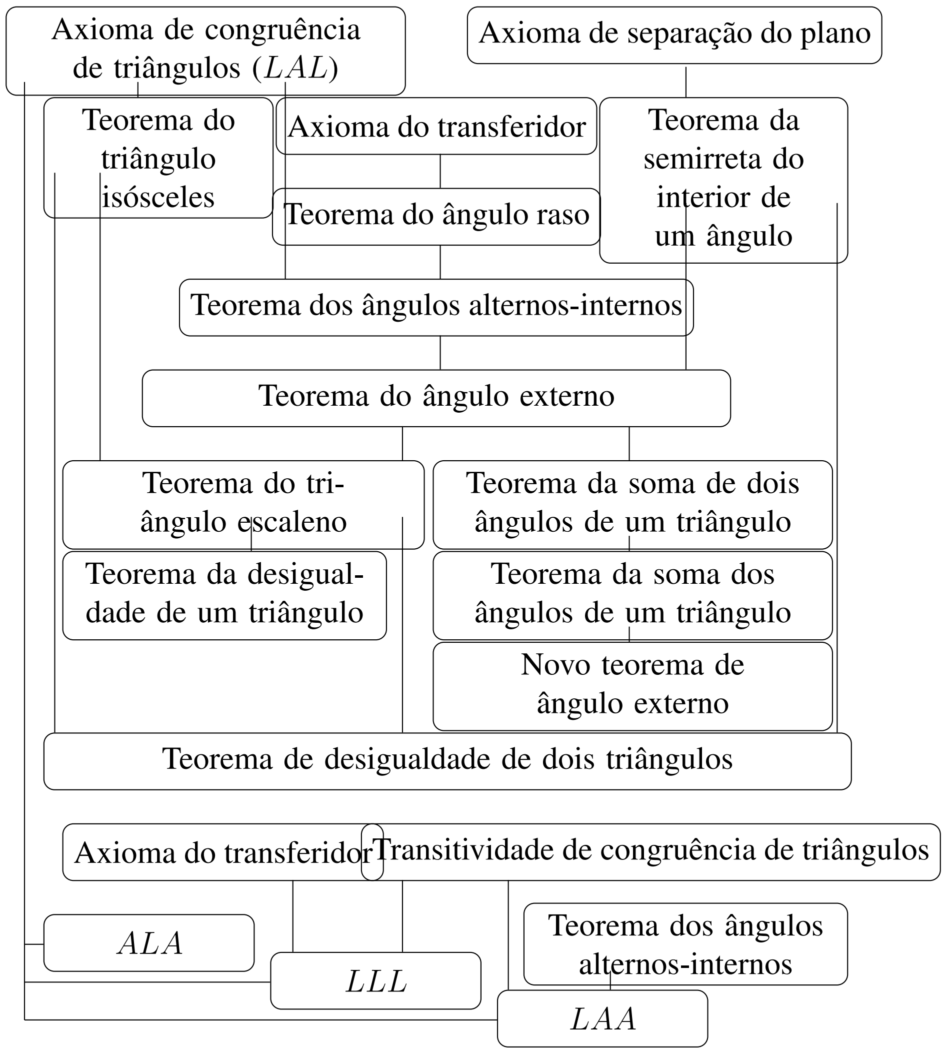
$AF = A'F' \quad \widehat{A} = \widehat{A}' \quad \widehat{E} = \widehat{E}' \qquad A'P = AE'$



Tomamos na semi-reta $A'E'$ um ponto P de modo que $A'P = AE$. (A posição do ponto P pode ser uma das duas indicadas na figura acima, mas a argumentação não precisa ser separada.) Pelo caso LAL, temos $\triangle A'PF` = \triangle AEF$. Pela transitividade de congruência de triângulos, a demonstração ficará concluída se provarmos que $\triangle A'PF' = \triangle A'E'F'$. E o que faremos em seguida.

Até agora, a demonstração é semelhante a do caso ALA. O que diferirá será a maneira de provar que o ponto P coincide com E'. Pelo argumento feito até agora, vemos que os ângulos indicados com a letra 7 são iguais. Se fosse P distinto de pelo Teorema dos ângulos correspondentes, as retas $E'F'$ e PF' deveriam ser paralelas, contrariando o fato de que elas se interceptam no ponto F'. Portanto, $P = E'$, donde $\triangle A'PF' = \triangle A'E'F'$, concluindo a demonstração. □

Item 8.22. Hierarquia dos teoremas do roteiro. No diagrama abaixo, aparecem alguns teoremas de unidades anteriores que são usados nas demonstrações dos teoremas deste roteiro. `{item:8:22}`


Axioma de congruência de triângulos (LAL)
Axioma de separação do plano
Teorema do triângulo isósceles
Axioma do transferidor
Teorema da semirreta do interior de um ângulo
Teorema do ângulo raso
Teorema dos ângulos alternos-internos
Teorema do ângulo externo
Teorema do triângulo escaleno
Teorema da soma de dois ângulos de um triângulo
Teorema da desigualdade de um triângulo
Teorema da soma dos ângulos de um triângulo
Novo teorema de ângulo externo
Teorema de desigualdade de dois triângulos
Axioma do transferidor
Transitividade de congruência de triângulos
ALA
Teorema dos ângulos alternos-internos
LLL
LAA

Capítulo 9

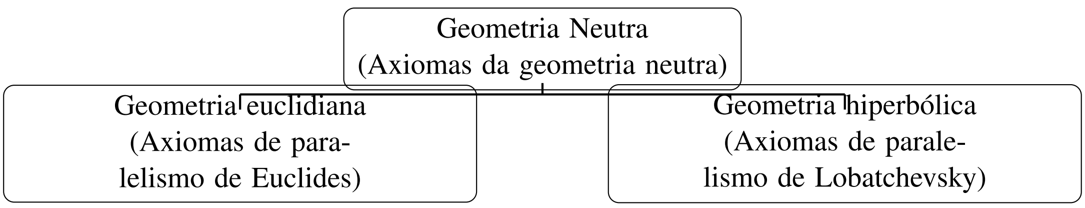
Geometria Euclidiana

{roteiro:9}

9.1 Roteiro 9A. Geometria Euclidiana

{roteiro:91}

O diagrama seguinte ilustra a relação entre as geometrias que estaremos estudando no restante do curso. A Geometria Neutra é constituída dos axiomas de incidência, axioma da régua, axioma de separação do plano, axioma do transferidor, do axioma de igualdade de triângulos e de todos os teoremas que se podem provar com esses axiomas. Na Geometria Neutra, prova-se que por um ponto fora de uma reta existe pelo menos uma paralela à reta. A bifurcação nas geometrias euclidiana e hiperbólica (ou de Lobatchevsky), é devida à possibilidade de dois axiomas: o axioma de paralelismo de Euclides - a paralela é única - e o axioma de paralelismo de Lobatchevsky — mais de uma paralela — que é a negação do axioma de Euclides. Assim, todos os teoremas da Geometria Neutra são também teoremas destas duas geometrias. Já os teoremas que necessitam do axioma de paralelismo de Euclides são exclusivos da geometria euclidiana e coisa análoga acontece com os teoremas da geometria de Lobatchevsky. Nesta unidade estudaremos a geometria euclidiana.



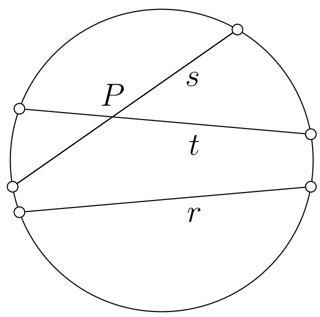
Geometria euclidiana

Na geometria euclidiana são válidos todos os axiomas da geometria neutra; acrescenta-se o axioma de paralelismo de Euclides, no enunciado adotado hoje em dia. Na verdade, este é o enunciado da Proposição 31, do Livro 1 de "Os Elementos", de Euclides. O geólogo e matemático escocês John Playfair (1748-1819) foi quem contribuiu para que fosse adotado este enunciado como sendo o axioma de paralelismo, ao invés do enunciado do quinto postulado de Euclides. Como veremos na lista de exercícios 9, o axioma original de Euclides é equivalente ao adotado por Playfair.

Axioma 11. ***Axioma de paralelismo de Euclides (APE).*** *Qualquer que seja a reta r e qualquer que seja o ponto P fora de r, então a paralela a r que passa por P é única.*

{item:91:1} ***Item 9A.1.*** O ME é independente dos demais axiomas?

Sim. O APE é independente dos axiomas da Geometria Neutra. Como se prova isto? Exibindo um contra-exemplo no modelo de Klein, introduzido no Roteiro 6A. No modelo de Klein, tem-se uma reta r e um ponto P fora de r pelo qual passam mais de uma paralela à r. Veja a figura abaixo.



Duas retas s e t paralelas a r pelo ponto P

{item:91:2} ***Item 9A.2.***

Lema 9.1. ***Lema da transversal.*** *Se r e s são retas paralelas e t corta s num ponto P, então t corta r.*

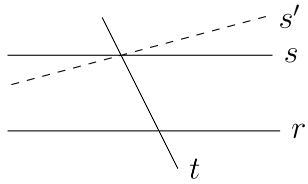
Demonstração. Se não cortasse, pelo ponto P existiriam duas paralelas, s e t, à reta r, contrariando o APE. (Observe que esta afirmação foi provada na lista de exercícios n° 2, quando estavam presentes apenas os axiomas de incidência e os de existência e unicidade de paralelas.) □

{item:91:3} ***Item 9A.3.***

Teorema 9.2. ***Recíproca do teorema dos ângulos alternos-internos.*** *Se duas retas paralelas r e s são cortadas por uma transversal, então ângulos alternos-internos são iguais.*

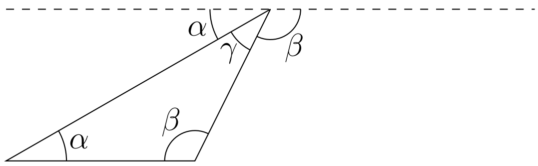
Hipótese: $r \parallel s$, t corta r e s.
Tese: ângulos alternos-internos são iguais.

Demonstração. Seja s' outra reta que passa pela interseção de s com t, de modo que um par de ângulos alternos-internos que t faz com r e s' sejam iguais. Então, pelo Teorema dos ângulos alternos-internos, r e s' são paralelas. Pelo APE, $s' = s$. Disto decorre a tese. □



Item 9A.4. {item:91:4}

Teorema 9.3. ***Teorema da soma dos ângulos de um triângulo na Geometria Euclidiana***. *A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°.*

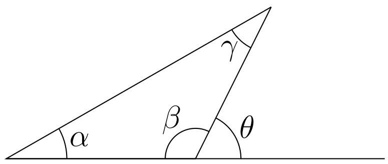


Demonstração. Tracemos por um vértice do triângulo uma reta paralela ao lado oposto; observemos que neste vértice aparecem três ângulos adjacentes formando um ângulo raso sendo, pois, a soma deles igual a 180°. Um destes ângulos é um dos ângulos do triângulo; os outros dois são iguais aos outros dois ângulos do triângulo, pela Recíproca do Teorema dos ângulos alternos-internos. Logo, a soma dos três ângulos do triângulo é 180°. □

Observação. Se admitirmos este teorema como axioma, podemos provar o APE. Isto será feito no Roteiro 9B. A conclusão é a de que este teorema é equivalente ao APE.

Item 9A.5. {item:91:5}

Teorema 9.4. ***Teorema do ângulo externo da geometria euclidiana***. *Um ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes a ele.*



Demonstração. Decorre das igualdades $\alpha + \beta + \gamma = 180$ e $\beta + \theta = 180$. $\square$

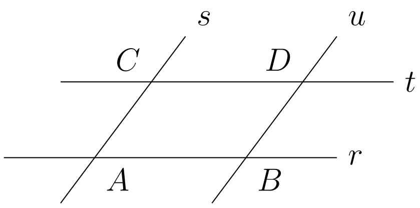
{item:91:6} ***Item 9A.6.***

Definição 9.1. *Paralelogramo. Um* ***paralelogramo*** *é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos. [Dois segmentos são paralelos quando estão em retas paralelas.]*

{item:91:7} ***Item 9A.7.*** ***Existência de paralelogramo***. Na geometria euclidiana, paralelogamo existe?

Ex 8, 12 não existe!?

Na geometria neutra, vimos que existe paralelogramo (Lista de Exercícios 8, n. 12). Logo, existe paralelogramo tanto na geometria euclidiana como na hiperbólica. Segue um processo de construção de paralelogramo que funciona na geometria euclidiana, mas não funciona na geometria neutra.



(1) Tomamos dois pontos A e B (axioma I_3);

(2) traçamos a reta r desterminada por A e B (axioma I_2);

(3) tomamos um ponto C fora da reta r (axioma I_1;

(4) A e C determinam uma reta s (axioma I_2);

(5) por C traçamos uma reta t paralela à r e por B uma reta u paralela à s (teorema de existência de paralela);

(6) Como as retas r e t são paralelas e u corta r, então u corta t num ponto D (Lema da transversal).

Os pontos A, B, C e D são vértices de um paralelogramo. De fato, os lados opostos são segmentos que estão em retas paralelas, logo, são paralelos.

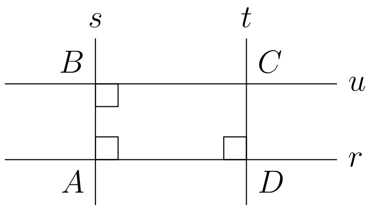
{item:91:8} ***Item 9A.8.***

Definição 9.2. *Retângulo. Um* ***retângulo*** *é um paralelogramo que tem os quatro ângulos retos.*

Na geometria neutra é impossível provar que existe retângulo (Lista de Exercícios 8, n.13) mas na geometria euclidiana, sim.

Item 9A.9. {item:91:9}

Teorema 9.5. ***Existência de retângulo na geometria euclidiana****. Existe retângulo.*



Aqui está um processo para a construção de um retângulo na geometria euclidiana.

(1) reta r;

(2) A ponto de r;

(3) s perpendicular a r por A;

(4) B ponto de s;

(5) u perpendicular a s por B;

(6) C ponto de u;

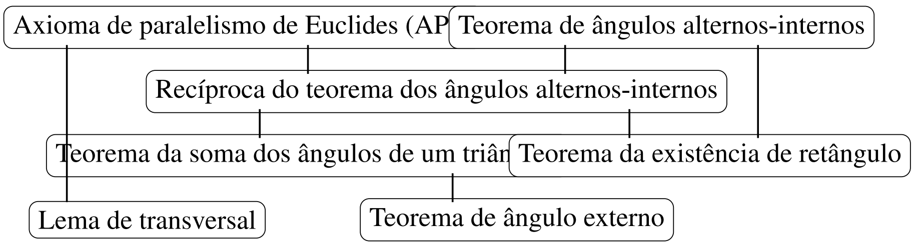
(7) t perpendicular a r por C, sendo D o pé da perpendicular.

(8) os pontos A, B, C e D são vértices de um retângulo.

De fato, $u \parallel r$ e $s \parallel t$, pelo teorema dos ângulos alternos-internos; logo, os lados opostos são paralelos. Os ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ são retos, por construção. Quanto ao ângulo $\widehat{C}$, sendo as retas s e t paralelas os ângulos alternos-internos formados com a transversal u são iguais (recíproca do teorema dos ângulos alternos-internos);

sendo um deles, $\widehat{D}$, reto o outro também é reto. Portanto, o $\widehat{C}$ também é reto. [Na geometria hiperbólica, o $\widehat{C}$ é agudo.]
Observação. Este é outro teorema da geometria euclidiana que, no Roteiro 9B, provaremos ser equivalente ao APE. Como veremos, não existe retângulo na Geometria Hiperbólica. No Roteiro 9B há uma lista de afirmações que são equivalentes ao APE. Nela você encontrará todos os teoremas deste roteiro. A reciproca do teorema dos ângulos alternos-internos também está lá, porém na versão que usa a soma dos ângulos colaterais internos (proposição iv daquela lista).

{item:91:10} ***Item 9A.10.*** Diagrama dos teoremas deste roteiro



9.2 Roteiro 9B. Os substitutos do Axioma de paralelismo de Euclides

{roteiro:92}

Um substituto para o APE (Axioma de Paralelismo de Euclides) é uma proposição que acrescentada aos axiomas da geometria neutra produz os mesmos teoremas que o APE. No esquema abaixo indicamos este fato de maneira resumida:

Geometria Euclidiana = Geometria neutro + APE = Geometria neutro + Substituto para o APE

A história nos conta que, desconfiados de que o quinto postulado de Euclides poderia ser provado a partir dos demais postulados, gerações sucessivas de matemáticos tentaram, sem sucesso, demonstrá-lo. Como o quinto postulado não poderia ser usado, a demonstração teria que ser feita na geometria neutra. Durante essas tentativas, várias afirmações equivalentes ao quinto postulado foram descobertas. Uma afirmação é equivalente ao quinto postulado quando ela pode substituí-lo para produzir os mesmos teoremas que o quinto postulado produz. Duas afirmações são **equivalentes** quando, admitida uma como verdadeira, a outra pode ser provada e vice-versa. Utiliza-se a notação *Afirmação A* $\Rightarrow$ *Afirmação B* para indicar que a segunda afirmação pode ser provada com o uso da primeira. Dizemos que a primeira implica ou acarreta a segunda. A notação *Afirmação A* $\Leftrightarrow$ *Afirmação B* significa *Afirmação A* $\Rightarrow$ *Afirmação B* e *Afirmação B* $\Leftarrow$ *Afirmação A*. Assim, o símbolo "$\Leftrightarrow$"é aqui utilizado para indicar que as afirmações são equivalentes.

Resumindo, um substituto para o APE é uma proposição equivalente ao APE na geometria neutra.

Existem várias proposições que são equivalentes ao APE. No fim deste roteiro apresentamos uma lista com mais de vinte delas. Escolhemos Mostrar que o APE Restrito é equivalente ao APE (enunciados abaixo), porque o trabalho desenvolvido aqui simplificará o trabalho que será feito na geometria de Lobatchevsky, no Roteiro 10A.

Na geometria neutra, o Axioma de Paralelismo Restrito (APE Restrito) é equivalente ao Axioma de Paralelismo de Euclides (APE).

Os dois enunciados são os seguintes.

Axioma 12. ***Axioma de paralelismo de Euclides (APE)***. *Qualquer que seja a reta r e qualquer que seja o ponto P fora de r, então a paralela a r que passa por P é única.*

Axioma 13. ***Axioma de Paralelismo Restrito (APE Restrito)****. Existe uma reta r e existe um ponto P fora de r tais que a paralela a r que passa por P é única.*

O que distingue o **APE** do **APE Restrito**, é a troca do "quantificador universal"qualquer que seja ($\forall$) pelo "quantificador existencial"existe um ($\exists$).
É claro que o **APE** implica o **APE Restrito**. O mais difícil é provar a implicação inversa (**APE Restrito** implica o **APE)**, isto é, se estiver garantida a existência de **uma** reta e de **um** ponto fora da reta pelo qual só passa uma paralela á reta, então a unicidade de paralela valerá também para **toda** reta e para **todo** ponto fora da reta.
A prova de que o **APE Restrito** implica o **APE** seguirá os seguintes passos:

1° Passo: APE Restrito Existência de retângulo.

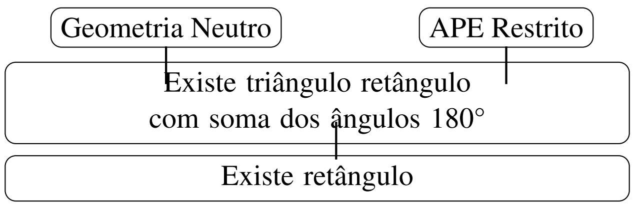
2° Passo: Existência de retângulo A soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180°.

3° Passo: A soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180°$\Rightarrow$ APE.

Em seguida, passaremos a demonstrar cada um dos passos.

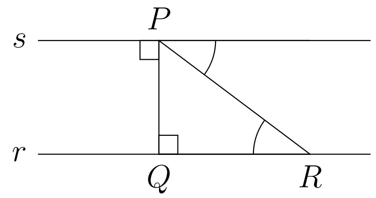
1°Passo: **O APE Restrito** implica a **existência de retângulo**.

O diagrama abaixo exibe o caminho percorrido para provar o 1°passo.



Proposição 9.6. ***Proposição A****. Se vale o APE Restrito, isto é, se existe uma reta r e existe um ponto P fora de r tais que, por P, passa apenas uma paralela a r, então existe um triângulo retângulo com soma dos ângulos igual a 180°.*

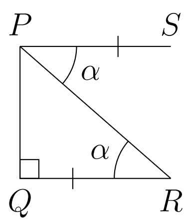
Demonstração. Aqui, a reta r e o ponto P são especiais pelo fato de satisfazerem o APE Restrito, ou seja, é única a reta s que é paralela a r pelo ponto P. A Recíproca do Teorema dos ângulos alternos-internos não vale na geometria neutra, mas como s é a única paralela a r por P, o mesmo argumento utilizado no Roteiro 9A pode ser usado para provar que os ângulos alternos-internos formados por qualquer transversal ares que passa pelo particular ponto P são iguais (figura abaixo).

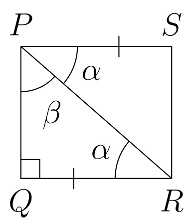


Agora, para construir o triângulo retângulo, tomamos em r o ponto Q como sendo o pé da perpendicular a r, traçada por P, e tomamos também outro ponto R em r. A demonstração de que a soma dos ângulos do triângulo PQR é 180°é a mesma utilizada na prova de que a soma dos ângulos de um triângulo é 180°, dada no Roteiro 9A: como a soma dos três ângulos em P é 180°, a soma dos três ângulos do triângulo é 180°. □

Proposição 9.7. ***Proposição B***. *Se existe um triângulo retângulo com soma dos ângulos 180°, então existe retângulo.*

Demonstração. A figura abaixo mostra como construir um retângulo $PQRS$ a partir de um triângulo retângulo PQR cuja soma dos ângulos é 180°. Em P construímos uma semi-reta Sps fazendo com SpR um ângulo a igual ao ângulo R do triângulo PQR e, em seguida, tomamos $PS = QR$. Depois traçamos o segmento SR. A construção foi feita desta maneira para que o caso LAL possa ser aplicado, resultando na congruência dos dois triângulos. Disto decorre que $\gamma = \beta$ e $\widehat{S} = \widehat{Q} = 90°$. Como no triângulo PQR tem-se $\alpha + \beta = 90°$, tem-se também $\alpha + \gamma = 90°$. Portanto, os quatro ângulos são retos e como os lados opostos são paralelos (pelo Teorema dos ângulos alternos-internos) $PQRS$ é um retângulo. □

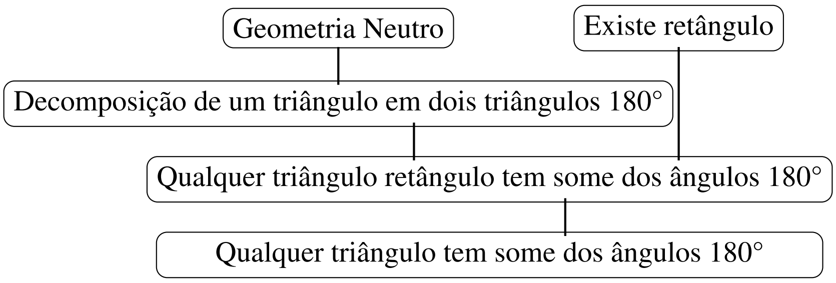




A aplicação da Proposição A seguida da Proposição B prova o 1°Passo.

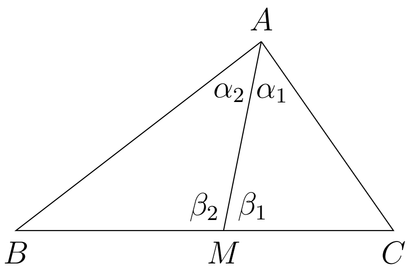
2° Passo: A existência de retângulo implica que a soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180°.

O caminho para demonstrar o 2° passo está ilustrado no diagrama abaixo.



Proposição 9.8. ***Proposição C***. *Quando um triângulo, com soma dos ângulos 180°, é decomposto em dois triângulos por um segmento ligando um vértice a um ponto do lado oposto, então cada um dos dois triângulos também tem soma dos seus ângulos igual a 180°.*

Demonstração. Na figura abaixo, o triângulo- ABC, com soma dos ângulos 180°é decomposto em dois triângulos pelo segmento AM.



Com as notações indicadas na figura, a soma dos ângulos do triângulo ABC é

$$\widehat{B} + \widehat{C} + \alpha_1 + \alpha_2 = 180°.$$

Como $\beta_1 + \beta_2 = 180°$, temos

$$\widehat{B} + \widehat{C} + \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 360°$$

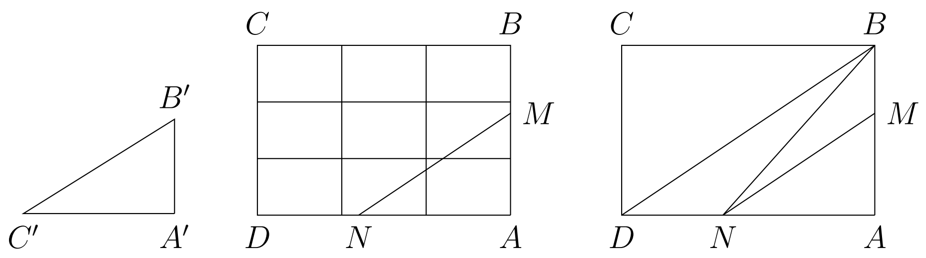
ou

$$(\widehat{B} + \alpha_1 + \beta_1) + (\widehat{C} + \alpha_2 + \beta_2) = 360°$$

As parcelas que aparecem entre parênteses são as somas dos ângulos dos triângulos ABM e ACM, respectivamente. Como cada uma delas deve ser $\leq 180°$, cada uma delas tem que ser igual a 180°. □

Proposição 9.9. ***Proposição D***. *Se existe retângulo, então qualquer triângulo retângulo tem soma dos ângulos igual a 180°.*

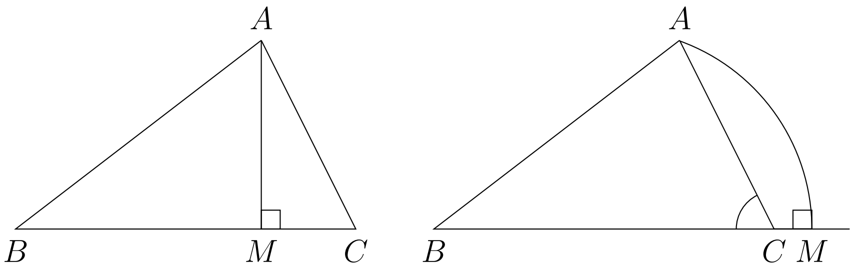
Demonstração. Seja $A'B'C'$ um triângulo retângulo com ângulo reto em A'. Queremos mostrar que a soma dos seus ângulos é 180°. Justapomos cópias do retângulo dado na hipótese, uma ao lado da outra, para obter um retângulo $ABCD$ grande suficientemente para que AB contenha um segmento $AM = A'B'$ e que AD contenha um segmento $AN = A'C'$. Isto está ilustrado na figura abaixo, no centro.



Uma cópia do retângulo $ABCD$, à direita, ilustra a prova de que a soma dos ângulos do triângulo AMN é 180°. A diagonal BD decompõe o retângulo em dois triângulos congruentes, com soma dos ângulos 180°. O segmento BN decompõe o triângulo ABD em dois triângulos ABN e BND, com soma dos ângulos 180°, pela Proposição C. Da mesma maneira, o triângulo ABN é decomposto em dois triângulos com soma dos ângulos 180°. Logo, a soma dos ângulos do triângulo AMN é 180°. Finalmente, como o triângulo $A'B'C'$ é congruente ao triângulo AMN, a soma dos seus ângulos é 180°, como queríamos demonstrar. □

Proposição 9.10. ***Proposição E***. *Se qualquer triângulo retângulo tem soma dos ângulos igual a 180°, então qualquer triângulo tem soma dos ângulos igual a 180°.*

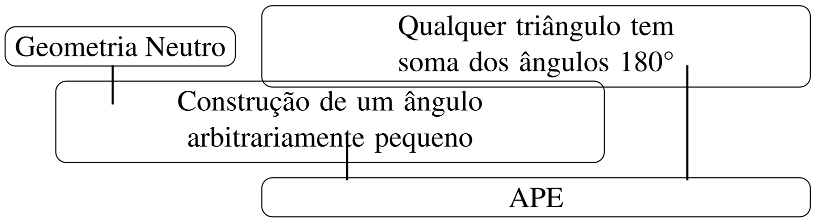
Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer. Pelo menos dois de seus ângulos são agudos (por um teorema da Geometria Neutra); suponhamos que AB e AC sejam agudos. Pelo vértice A, baixamos a altura AM do triângulo ABC. O ponto M está no lado BC, pois, se não fosse assim, o Teorema do Ângulo Externo seria contrariado, como sugere a figura abaixo, à direita (o ângulo C, que é ângulo externo do triângulo ACM deveria ser maior que o ângulq M). Portanto, o segmento AM decompõe o triângulo ABC em dois triângulos retângulos. Pela hipótese, a soma dos ângulos desses triângulos é 180°. Disto decorre que a soma dos ângulos do triângulo ABC é também 180°, concluindo a demonstração do lema. □



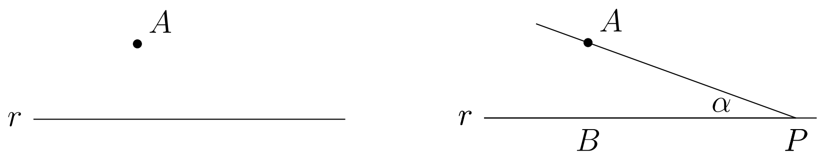
Agora, a demonstração do 2° Passo fica assim: a existência de retângulo implica que qualquer triângulo retângulo tem soma dos ângulos igual a 180°(Proposição D). Isto por sua vez garante que a soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180°(Proposição E).

3° Passo: Se a soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180°, então vale o APE.

Veja no diagrama abaixo o roteiro para provar o terceiro passo.

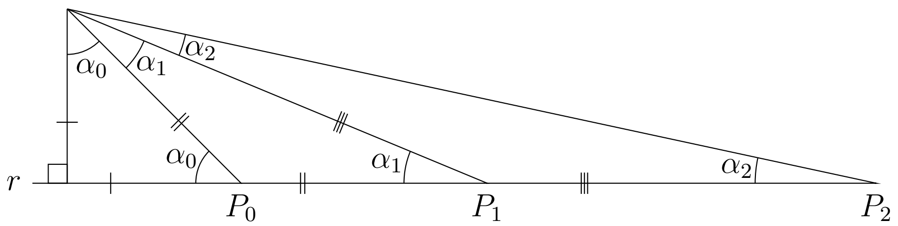


Proposição 9.11. ***Proposição F***. *Dado um ponto A fora de uma reta r e dado um número $\beta > 0$, existe uma reta que passa por A e faz com r um ângulo a menor que β.*



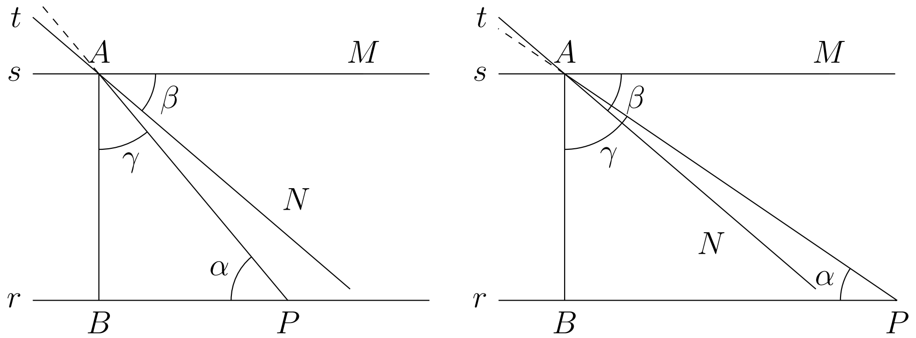
Demonstração. Pelo ponto A tracemos uma perpendicular AB à reta r (figura abaixo). A tese é que existe um ponto P tal que o ângulo APB é menor que β. A idéia da demonstração é construir uma seqüência de triângulos isósceles $\triangle ABP_0$, $\triangle AP_0P_1$, ..., $\triangle AP_{(n-1)}P_n$, com os ângulos da base α_n decrescendo, como mostra a figura abaixo. Assim, $BP_0 = AB$; $P_0P_1 = AP_0$, ..., $P_{(n-1)}P_n = AP_{(n-1)}$. Como, na Geometria Neutra, a soma dos ângulos de um triângulo é $\leq 180°$, então $\alpha_0 \leq 45°$. Decorre do Novo Teorema do Angulo Externo (um ângulo externo de um triângulo é $\geq$ que a soma dos ângulos internos não adjacentes, Roteiro 8) que $2\alpha_1 < \alpha_0$, $2\alpha_2 < \alpha_1$, ..., $2\alpha_n < \alpha_{(n-1)}$. Donde, $\alpha_1 \leq (1/2) \times 45°$, $\alpha_2 \leq (1/2) <$

$\alpha_1(1/2^2) \times 45°$, ..., $a_n \leq (1/2)\alpha_{(n-1)} \leq (1/2^n) \times 45°$. Este número tende para zero quando n tende para infinito. Logo, para n suficientemente grande, teremos $\alpha_n < \beta$. Tomando $P = Pn$, para este valor de n, concluímos a demonstração. $\square$



Proposição 9.12. ***Proposição G***. *Se a soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180°, então qualquer que seja a reta r e qualquer que seja o ponto A fora de r, a paralela a r que passa por A é única.*

Demonstração. Seja r uma reta qualquer e seja A um ponto fora de r.



$\alpha < \beta$ $\alpha > \beta$

Pelo ponto A, tracemos a perpendicular AB à reta r e, em seguida, a perpendicular s à reta AB. A reta s é paralela a r. Queremos mostrar que não existe outra paralela a r por A. Seja t outra reta que passa por A. Devemos mostrar que t não é paralela a r.

Aplicando a Proposição F, seja P um ponto de r tal que o ângulo BPA (ângulo α da figura acima) seja menor que β, que é o ângulo MAN da figura, sendo M um ponto de s e N um ponto de t. Como estamos admitindo que a soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180°, no triângulo APB, tem-se $\alpha + \gamma = 90°$. Como $\alpha < \beta$, resulta que $\beta + \gamma > 90°$. Disto decorre que o ponto P não pode estar na reta t. E também que, dentre as duas possibilidades para a posição de P, ilustradas na figura acima, a correta é a da figura da direita, ou seja, a semi-reta SAN está no interior do ângulo BAP. Pelo Teorema da semi-reta do interior de um ângulo (Roteiro 6B), a reta t corta BP, não sendo, pois, paralela a r. Isto conclui a demonstração do 3°passo. □

Conclusão da prova de que APE Restrito $\Leftrightarrow$ APE

Relembramos os três passos percorridos para provar que o APE Restrito implica o APE:

APE Restrito $\Rightarrow$ Existência de retângulo A soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180°= APE.

Como é óbvio que o APE $\Rightarrow$ APE Restrito, o ciclo de implicações se fecha:

APE Restrito $\Rightarrow$ Existência de retângulo A soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180°$\Rightarrow$ APE $\Rightarrow$ APE Restrito,

concluindo a longa demonstração de que APE Restrito $\Leftrightarrow$ APE.

O trabalho desenvolvido até agora permite obter mais proposições equivalentes. O diagrama dos principais teoremas provados nos três passos é o seguinte

APE Restrito

$\Downarrow$

Existe triângulo retângulo
com soma dos ãngulos 180°

$\Downarrow$

Existe retângulo

$\Downarrow$

Qualquer triângulo retãngulo
tem soma dos ângulos 180°

$\Downarrow$

Qualquer triângulo tem soma dos ângulos 180°

$\Downarrow$

APE

$\Downarrow$

APE Restrito

Deste ciclo fechado de implicações decorre que todas as proposições do diagrama são equivalentes entre si. No diagrama abaixo destaco as principais.

APE Restrito $\Leftrightarrow$ Existência de retângulo $\Leftrightarrow$ Qualquer triângulo tem soma dos ângulos 180° $\Leftrightarrow$ APE

Um teorema do tipo "tudo ou nada"

Na Geometria Neutra, vimos que a soma dos ângulos de qualquer triângulo é menor ou igual a 180°. Somente um novo axioma é capaz de definir o que de fato acontece com a soma dos ângulos de um triângulo. Uma coisa é certa: se algum axioma garantir que existe um triângulo com soma dos ângulos igual a 180°, então todos os triângulos têm soma dos ângulos igual a 180°. E o que diz o teorema seguinte.

Teorema 9.13. ***Teorema A.***

Demonstração. Tomamos um triângulo cuja soma dos ângulos é 180°dado na hipótese. Traçamos a altura pelo seu vértice do maior ângulo (para garantir que o pé da altura esteja no lado oposto) e aplicamos a Proposição C para concluir que a soma dos ângulos de cada um dos triângulos retângulos obtidos pela decomposição tem soma dos ângulos igual a 180°.
Agora, a Proposição B garante que existe retângulo. Pelo 2° Passo, qualquer triângulo tem soma dos ângulos igual a 180°, concluindo a demonstração. □

Quando o Existencial acarreta o Universal

Aqui, os termos "existencial"e "universal"dizem respeito aos quantificadores "existe um"($\exists$) e "qualquer que seja"($\forall$). Na geometria neutra, o que o Teorema A nos diz é que a existência de um triângulo com soma dos ângulos 180°implica que todos os triângulos têm esta propriedade. De outra maneira: ou todos os triângulos têm soma dos ângulos 180°, ou nenhum tem soma dos ângulos 180°.
Coisa semelhante acontece com a propriedade de unicidade de paralela a uma reta por um ponto fora d4 reta, como vimos: se valer para uma reta e um ponto (APE-Restrito), então vale para toda reta e todo ponto (APE).

Outros substitutos para o APE

Neste Roteiro, exibimos três afirmações que são equivalentes ao Axioma de Paralelismo de Euclides. Encerramos o roteiro dando uma lista de muitas afirmações que são equivalentes ao APE e, portanto, equivalentes entre si. Qualquer uma delas pode ser utilizada como um axioma da geometria euclidiana. As afirmações trabalhadas neste roteiro, além de i, foram: ii, xiv e xxiii.

i. (APE) Qualquer que seja a reta e qualquer que seja o ponto fora da reta, é única a paralela à reta que passa pelo ponto.

ii. (APE Restrito) Existe uma reta e existe um ponto fora da reta tais que é única a paralela à reta pelo ponto.

iii. (5° postulado de Euclides) Se M e N são dois pontos do mesmo lado da reta AE tais que $M\widehat{A}E + N\widehat{E}A < 180°$, então AM intercepta EN.

iv. Se M e N são dois pontos do mesmo lado da reta AE e $AM \parallel EN$, então $M\widehat{A}E + N\widehat{E}A = 180°$.

v. Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas.

vi. Têm-se duas retas paralelas. Se uma terceira reta corta uma delas, então também corta a outra.

vii. Têm-se duas retas paralelas. Se uma terceira reta é perpendicular a uma delas, então é perpendicular à outra também.

viii. Se $l \parallel m$, $r \perp m$, então $r \parallel s$.

ix. As mediatrizes de um triângulo são concorrentes.

x. Dados três pontos não colineares, existe uma circunferência que passa por eles.

xi. Dados três pontos não colineares, existe um ponto eqüidistante deles.

xii. Se uma reta é perpendicular a um lado de um ângulo agudo, então ela corta o outro lado.

xiii. Por qualquer ponto no interior de um ângulo, passa uma reta que corta ambos os lados, sem passar pelo vértice.

xiv. A soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180°.

xv. Um ângulo externo de um triângulo é igual a soma dos ângulos internos não adjacentes.

xvi. Se um ponto A está numa circunferência de diâmetro BC, sendo $A \neq B$ e $A \neq C$, então $B\widehat{A}C$ é reto.

xvii. Se $B\widehat{A}C$ é reto, então A está na circunferência de diâmetro BC.

xviii. As mediatrizes dos catetos de um triângulo retângulo se interceptam.

xix. Se $l \perp r$, $r \perp s$ e $s \perp m$, então l intercepta m.

xx. Existe um ângulo agudo tal que qualquer reta perpendicular a um lado corta o outro lado.

xxi. Existe um ângulo agudo tal que qualquer ponto no interior do ângulo está numa reta que corta ambos os lados sem ser pelo vértice.

xxii. Existe um triângulo cuja soma dos ângulos é 180°.

xxiii. Existe um retângulo.

xxiv. Existem duas retas eqüidistantes.

xxv. Se três ângulos de um quadrilátero são retos, então o quarto também é.

xxvi. Existem dois triângulos semelhantes que não são congruentes.

9.3 Resumo

Geometria Euclidiana

Alguns modelos, com indicação dos axiomas válidos em cada um.

	I_1	I_2	I_3	Régua	Separ.	Transfer.	Congr.	APE	APL
Finito	?	?	?	N	N	N	N	?	?
Bizarro	S	S	S	S	N	N	N	S	N
Taxista	S	S	S	S	S	N	N	S	N
Moulton	S	S	S	S	S	N	S	S	N
Cartesiano	S	S	S	S	S	N	S	S	N
Klein	S	S	S	S	S	N	S	N	S
Poicaré	S	S	S	S	S	N	S	N	S

Modelo para a geometria euclidiana: Cartesiano.
Modelos para a geometria hiperbólica: de Klein e de Poincaré.

Axiomas da Geometria Neutra.

Axioma I_1. Qualquer que seja a reta, existe pelo menos um ponto fora dela.

Axioma I_2. Dois pontos determinam uma reta. Em outras palavras, dados dois pontos distintos quaisquer, existe uma e uma só reta que os contém.

Axioma I_3. Existem pelo menos dois pontos.

Axioma da régua. Existe uma função $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ e, para cada reta r, existe uma função bijetora $f_r : r \to \mathbb{R}$, associada com d por

$$d(A, B) = |f_r(A) - f_r(B)|$$

quaisquer que sejam os pontos A e B de r. [Aqui, $\mathcal{P}$ representa o conjunto de todos os pontos.]

Axioma de separação do plano. Qualquer reta separa o plano.

Axioma do transferidor. Existe medida de ângulo.

Axioma de congruência de triângulos (LAL). Se $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $\widehat{A} = \widehat{A'}$, então triângulo ABC = triângulo $A'B'C'$.

Axiomas da Geometria Euclidiana: os axiomas da Geometria Neutra mais o seguinte

Axioma de paralelismo de Euclides (APE). Qualquer que seja a reta r e qualquer que seja o ponto P fora de r, por P passa só uma paralela à reta r.

Axiomas da Geometria Hiperbólica: os axiomas da Geometria Neutra mais o seguinte

Axioma de paralelismo de Lobatchevsky (APL). Existe uma reta r e existe um ponto P fora de r tal que, por P passam mais de uma paralela a r.

9.4 Lista de Exercícios n. 9

A não ser que esteja explícito em contrário no enunciado do exercício, consideram-se em vigor todos, os axiomas da geometria euclidiana.

9.1. *Como se prova que o APE é independente dos axiomas da Geometria Neutra? [Use o modelo de Klein, que é um modelo para a geometria neutra também.]*

9.2. ***Lema da transversal***. *Se r e s são retas paralelas e t corta s num ponto P, então t corta r. Prove e mostre que o APE é indispensável.*

9.3. ***Lema (transitividade de paralelismo)***. *A relação de paralelismo é transitiva. Prove e mostre que o APE é indispensável.*

9.4. ***Recíproca dço teorema dos ângulos alternos-internos***. *Se duas retas paralelas r e s são cortadas por uma transversal, então ângulos alternos-internos são iguais. Prove e mostre que o APE é indispensável. O axioma de congruência de triângulos é indispensável?*

9.5. ***Teorema dos ângulos colaterais internos.*** *Se duas retas paralelas r e s são cortadas por uma transversal, então a soma dos ângulos colaterais internos é 180°. Prove.*

9.6. ***O quinto postulado de Euclides***. *Se duas retas são cortadas por uma transversal de modo que a soma de dois ângulos colaterais internos é <180°, então as duas retas se cortam. Prove.*

9.7. *Em um sistema axiomático, duas afirmações são equivalentes se, admitida uma delas como verdadeira, a outra pode ser provada. Mostre que, na Geometria Neutra, o APE é equivalente ao quinto postulado de Euclides.*

9.8. ***Teorema (soma dos ângulos de um triângulo)***. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Prove.*

9.9. *Mostre que, na Geometria Neutra, o teorema da soma dos ângulos de um triângulo é equivalente ao APE.*

9.10. *Defina paralelogramo. Existe paralelogramo na geometria euclidiana? Você é capaz de construir um paralelogramo na geometria neutra? Se sim, já fica provado que existe paralelogramo na geometria hiperbólica também.*

9.11. *Na geometria neutra, prove que em um paralelogramo (a) cada vértice está no interior do ângulo oposto; (b) as diagonais se interceptam.*

9.12. *Prove todas as propriedades de paralelogramo que você conhece. Cite uma propriedade de paralelogramo que não vale no modelo de Klein.*

9.13. *Defina retângulo. Existe retângulo na geometria euclidiana?*

9.14. *Prove todas as propriedades de retângulo que você conhece.*

9.15. *Na ausência do axioma de congruência de triângulos você pode dizer que, se os quatro ângulos de um quadrilátero são retos, então ele é um retângulo? [Não; dê contra-exemplo no modelo de Moulton]*

9.16. *Definia lòsango. Existe losango na geometria euclidiana?*

9.17. *Prove todas as propriedades de losango que você conhece.*

9.18. *Defina quadrado. Existe quadrado na geometria euclidiana?*

9.19. *Prove todas as propriedades de quadrado que você conhece.*

9.20. *Se uma circunferência passa por um ponto interior e por um ponto exterior de outra circunferência, então as duas se interceptam? [Esta é uma questão dificil. Eu não espero que você saiba resolvê-la.]*

9.5 Soluções da Lista de Exercícios n. 9

9.7. *Em um sistema axiomático, duas afirmações são equivalentes se, admitida uma delas como verdadeira, a outra pode ser provada. Mostre que, na Geometria Neutra, o APE é equivalente ao quinto postulado de Euclides.*

Resposta:
Afirmação 1. Axioma de paralelismo de Euclides (APE). *Qualquer que seja a reta r e qualquer que seja o ponto P fora de r, por P passa só uma paralela à reta r.*

Afirmação 2. O quinto postulado de Euclides. *Se duas retas são cortadas por uma transversal de modo que a soma de dois ângulos colaterais internos é < 180 então as duas retas se cortam.*

Queremos mostrar, na Geometria Neutra, que a Afirmação 1 é equivalente à Afirmação 2.

(a) Primeiro admitimos a Afirmação 1 como verdadeira e provamos a Afirmação 2.

Hipótese da Afirmação 2: r e s são retas cortadas por uma transversal t, fazendo ângulos colaterais internos α e β, sendo $\alpha + \beta < 180$.

Tese da Afirmação 2: r e s se interceptam.

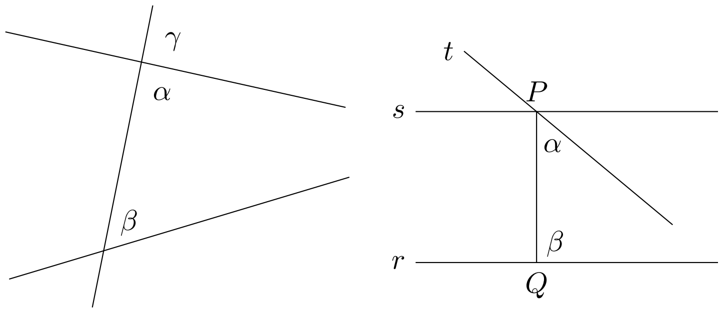
Demonstração. Por absurdo, se r e s fossem paralelas, pela Recíproca do Teorema dos ângulos alternos-internos (que decorre da Afirmação 1), seria $\beta = \gamma$ (figura abaixo, à esquerda). Mas $\alpha + \gamma = 180$, donde $\alpha + \beta = 180$, contrariando a hipótese. □

(b) Agora admitimos a Afirmação 2 como verdadeira e provamos a Afirmação 1.

Hipótese da Afirmação 4: r é reta e P é ponto fora de r.

Tese da Afirmação 1: é única a paralela à r, traçada por P.

Demonstração. Pelo método das perpendiculares, traçamos $s \parallel r$, por P. Por absurdo, suponhamos que existe outra reta $t \parallel r$, por P. Então, o ângulo a (indicado na figura abaixo, à direita) que a reta t faz com a transversal PQ é agudo, donde $\alpha + \beta = \alpha + 90 < 180$. Agora, pela Afirmação 2, t corta r, o que contraria o fato de que $t \parallel r$. □

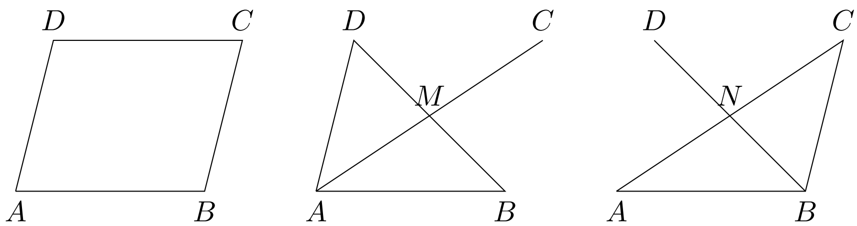


9.11. *Na geometria neutra, prove que em um paralelogramo (a) cada vértice está no interior do ângulo oposto; (b) as diagonais se interceptam.*

Resposta:

(a) Queremos mostrar que o ponto C está no interior do ângulo $\widehat{A}$ (figura abaixo, à esquerda). Para isto, pela definição de interior de ângulo como interseção de dois semiplanos, devemos mostrar que $C \in H_{AB}^{D} \cap H_{AD}^{B}$. Como $DC \parallel AB$, DC não corta AB, logo, D e C estão no mesmo semiplano H_{AB}^{D}. Também, como $BC \parallel AD$, BC não corta AD, logo, C e B estão no mesmo semiplano H_{AD}^{B}. Portanto, $C \in H_{AB}^{D} \cap H_{AD}^{B}$.

(b) Queremos mostrar que a diagonal BD do paralelogramo corta a diagonal AC. Pelo Teorema da semi-reta do interior de um ângulo (Roteiro 6B), a semi-reta S_{AC} corta o segmento BD num ponto M tal que $B * M * D$ (figura abaixo, no meio). Pelo mesmo teorema, a semi-reta S_{BD} corta o segmento AC num ponto N tal que $A * N * C$ (figura abaixo, à direita). Os pontos M e N pertencem às retas AC e BD. Como estas retas são distintas, devemos ter $M = N$. Logo, o ponto M pertence aos segmentos AC e BD, ou seja, os segmentos AC e BD se interceptam.



9.13. *Defina retângulo. Existe retângulo na geometria euclidiana?*

Resposta:

Retângulo é um paralelogramo que tem os quatro ângulos retos. Existe retângulo na geometria euclidiana. Para provar isto, construa um retângulo, justificando cada passo da construção.

9.15. *Na ausência do axioma de congruência de triângulos você pode dizer que, se os quatro ângulos de um quadrilátero são retos, então ele é um retângulo? [Não; dê contra-exemplo no modelo de Moulton]*

Resposta:

Não. Construa um quadrilátero no modelo de Moulton com os quatro ângulos retos. Para isto, comece com uma reta quebrada, escolha um ponto conveniente, trace por ele duas perpendiculares à reta quebrada e complete o quadrilátero com os quatro ângulos retos. O quadrilátero não é paralelogramo porque tem dois lados opostos que não são paralelos.

Capítulo 10

Geometria Hiperbólica

{roteiro:10}

10.1 Roteiro 10A. Geometria Hiperbólica: Tópicos básicos

{roteiro:101}

Axioma de paralelismo de Lobatchevsky (APL). Soma dos ângulos de um triângulo. Não existe retângulo. Não existem triângulos semelhantes que não sejam congruentes. Cinco casos de congruência: LAL, ALA, LLL, LAA e AAA.

Introdução. Como vimos antes, na geometria neutra são válidos todos os axiomas introduzidos exceto os axiomas de paralelismo. A existência de paralela a uma reta dada por um ponto dado é um teorema da geometria neutra. A questão da unicidade de paralela é indecidível na geometria neutra. Quando admitimos a unicidade, temos a geometria euclidiana; quando admitimos a não-unicidade temos a geometria hiperbólica.
O enunciado da unicidade de paralela é de caráter universal: $\forall r$ e $\forall P \notin r$, a *paralela a r por P é única*. O enunciado da não-unicidade, por ser a negação daquela, é de caráter restrito: $\exists r$ e $\exists P \notin r$ *tais que, por P passam mais de uma paralela a* r. Este é o axioma de paralelismo da geometria hiperbólica. Felizmente, é possível provar a universalidade desta propriedade: $\forall r$ e $\forall P \notin r$, *por P passam mais de uma paralela a r*.
Os teoremas da geometria neutra são também teoremas das geometrias euclidiana e hiperbólica. Já os teoremas que dependem dos respectivos axiomas de paralelismo, são exclusivos de cada uma das. geometrias. Por exemplo, na geometria euclidiana, a soma dos ângulos de qualquer triângulo é = 180°; na hiperbólica é < 180. Como vimos, na geometria neutra esta soma é ≤ 180°.
Na geometria neutra, a questão da existência de retângulo é indecidível; ela depende do axioma de paralelismo que se adota. Na geometria euclidiana existe retângulo; na geometria hiperbólica não existe retângulo. Outra questão indecidível

na geometria neutra é a da existência de triângulos semelhantes (ângulos correspondentes iguais e lados correspõndentes proporcionais): na geometria hiperbólica não existem triângulos semelhantes que não sejam congruentes; na geometria euclidiana existem triângulos semelhantes que não são congruentes. Outro fato interessante é que retas paralelas são eqüidistantes na geometria euclidiana, mas não o são na geometria hiperbólica. Ainda sabre paralelas, na geometria hiperbólica para algumas retas paralelas não existe perpendicular comum, para outras existe perpendicular comum; não pode existir mais de uma perpendicular comum a duas retas, porque senão existiria retângulo. Como veremos, estes são apenas alguns dos fatos que distinguem uma geometria da outra. No Roteiro **??**, enunciamos mais de vinte teoremas que são equivalentes ao Axioma de Paralelismo de Euclides. Eles são exclusivos da geometria euclidiana; as suas negações são teoremas exclusivos da geometria hiperbólica.

Os axiomas da geometria hiperbólica são, pois, todos os axiomas da geometria neutra, mais o axioma de paralelismo de Lobatchevsky.

Axioma 14. ***Axioma de paralelismo de Lobatchevsky (APL)****. Existe uma reta r e existe um ponto P fora de r pelo qual passam mais de uma paralela à reta r.*

O APL é a negação do APE. Observemos que o "quantificador universal"*qualquer que seja* ou *para todo*, que se costuma denotar por $\forall$, que aparece no APE, é substituído pelo "quantificador existencial"*existe pelo menos um* ou *existe um*, denotado por $\exists$. O APL é de caráter restrito: ele garante a existência de uma reta e de um ponto com a propriedade de paralelismo enunciada. Felizmente, a propriedade de não-unicidade de paralelas é universal, como provaremos.

{item:101:1} ***Item 10A.1.*** *Universalidade da não-unicidade de paralelas*. O APL tem o seu enunciado de não-unicidade de paralela restrito a uma reta e a um ponto. Mostraremos aqui que esta propriedade é universal: a não-unicidade de paralela vale para toda reta e todo ponto fora da reta. No Roteiro 9A, vimos como o APE Restrito implica o APE. Agora, como veremos, a universalização da propriedade de não-unicidade de paralela decorre facilmente do fato de que o APE Restrito implica o APE, teorema este demonstrado na Geometria Neutra.

Teorema 10.1. ***Teorema da universalidade da não-unicidade de paralela****. Na Geometria Hiperbólica, qualquer que seja a reta r e qualquer que seja o ponto P fora de r, existem mais de uma paralela a r por P.*

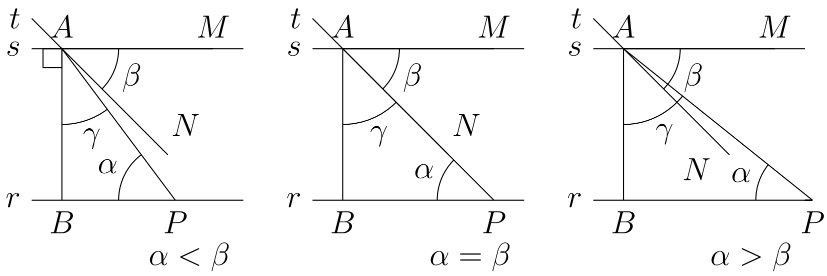
Demonstração. Por absurdo. A negação da tese é: *Existe uma reta r e existe um ponto P fora de r tais que a paralela a r que passa por P é única*. Vimos no Roteiro 9B que este é precisamente o enunciado do APE Restrito. Vimos também que, na Geometria Neutra, o APE Restrito implica o APE, que é a negação do APL. Portanto, a negação da tese contraria o APL. Logo, a tese é verdadeira. $\square$

Observação. Não se iluda o leitor pensando que este teorema é fácil. Esta demonstiução ficou simples porque a parte mais trabalhosa e dificil, que é provar que o APE Restrito implica o APE, foi feita no Roteiro 9B.

Item 10A.2. {item:101:2}

Teorema 10.2. ***Teorema de existência de um triângulo com soma dos ângulos 180°.*** *Existe um triângulo cuja soma dos ângulos é menor que 180°.*

Demonstração. Construiremos um triângulo cuja soma dos ângulos é estritamente menor que 180°.
Tomemos uma reta r e um ponto A fora de r. Primeiro construímos uma paralela s à r pelo método das perpendiculares. Assim, r e s são perpendiculares a AB (B é pé da perpendicular baixada*de A a r, figura abaixo). Seja t outra paralela a r por A. Dois dos ângulos que t faz com s é agudo. Seja $\beta = NAM$ o ângulo indicado na figura, sendo M em s e N em t. Pela Proposição F do Roteiro 9B, existe um ponto P em r, como indicado na figura, de modo que o ângulo $\alpha = BPA$ é menor que β.



β na figura de direita está errado?

Na figura acima, que ilustra a demonstração, exibimos as três alternativas para a posição da semi-reta S_{AN}. Na figura da esquerda, $S_{AN} - \{A\}$ está no interior do ângulo PAM. Na figura do meio, S_{AN} passa pelo ponto P, o que não é possível, pois t é paralela à reta r. Na figura da direita, $S_{AN} - \{A\}$ está no interior do ângulo BAP, o que também não é possível, pois S_{AN} cortaria o segmento BP, pelo teorema da semirreta do interior de um ângulo (Roteiro 6B), contrariando o fato de que t é paralela a r. Resta, pois, a alternativa ilustrada na figura da esquerda, em que $S_{AN} - \{A\}$ está no interior do ângulo PAM. Sendo assim, temos $\beta + \gamma < 90°$, donde $\alpha + \gamma < 90°$(porque $\alpha < \beta$). Logo, a soma dos ângulos do triângulo retângulo $\triangle ABP$ é menor que 180°. Construímos, assim, um triângulo cuja soma dos ângulos é $< 180°$, demonstrando o teorema. □

Observação. A parte dificil desta demonstração, a prova da Proposição F, foi feita no Roteiro 9B.

Item 10A.3. {item:101:3

Teorema 10.3. ***Teorema da soma dos ângulos de um triângulo na Geometria Hiperbólica****. Todo triângulo tem soma dos ângulos menor que 180°.*

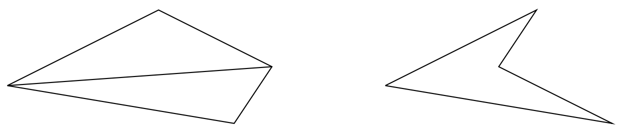
Demonstração. Na geometria neutra e, portanto, na geometria hiperbólica também, todo triângulo tem soma dos ângulos < 180°. Suponhamos que existe um triângulo com soma dos ângulos igual a 180°. Então, pelo Teorema A do Roteiro 9B, todo triângulo tem a soma dos ângulos igual a 180°, o que contraria o teorema de existência de um triângulo com soma dos ângulos < 180°. Portanto, não pode haver triângulo com soma dos ângulos igual a 180°. Logo, na geometria hiperbólica, todos os triângulos têm soma dos ângulos < 180°. □

Observação. Este teorema também não é fácil. A parte mais difícil é a demonstração do Teorema A do Roteiro 9B, que foi feita naquele roteiro.

{item:101:4} ***Item 10A.4.***

Teorema 10.4. ***Teorema da soma dos ângulos de um quadrilátero****. A soma dos ângulos de qualquer quadrilátero convexo é* $< 360°$*.*

Demonstração. Basta observar que a soma dos ângulos do quadrilátero é igual à soma dos ângulos dos dois triângulos em que o quqdrilátero fica decomposto por uma diagonal. Que a diagonal do quadrilátero está contida no interior de cada ângulo interno é uma conseqüência do axioma de separação do plano. Veja a Lista de Exercícios n. 9. □



Quadrilátero convexo Quadrilátero não-convexo

{item:101:5} ***Item 10A.5.***

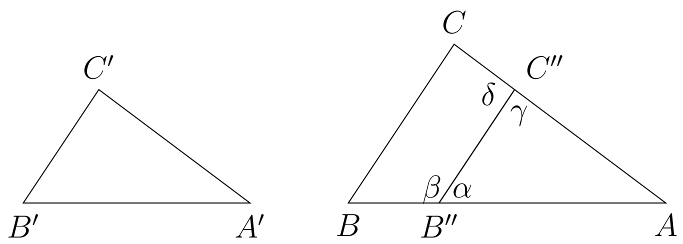
Teorema 10.5. ***Teorema da não existência de retângulo****. Não existe retângulo.*

Demonstração. Decorre do teorema da soma dos ângulos de um quadrilátero, já que a soma dos ângulos de um retângulo é 360°. □

{item:101:6} ***Item 10A.6.***

Teorema 10.6. ***Teorema da não existência de triângulos semelhantes****. Não existem triângulos semelhantes que não sejam congruentes, ou melhor, triângulos semelhantes são congruentes.*

Demonstração. Dois triângulos são semelhantes se existe uma correspondência entre os vértices de modo que ângulos correspondentes são iguais e lados correspondentes são proporcionais. Suponhamos, por absurdo, que existam dois triângulos semelhantes e não congruentes $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, sendo $= \widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$ e $\widehat{C} = \widehat{C}'$. Não pode existir lado de um triângulo igual ao lado correspondente do outro, senão os triângulos seriam congruentes, pelo caso ALA. Então, dois lados de um dos triângulos devem ser menores que dois lados correspondentes do outro, digamos, $A'B' < AB$ e $A'C' < AC$. Tomamos em AB e em AC os pontos B' e C', respectivamente, de modo que $AB'' = A'B'$ e $AC'' = A'C'$. Pelo caso LAL, $\triangle AB''C'' = \triangle A'B'C'$. Usando o fato de que $\alpha + \beta = 180$ e que $\alpha = \widehat{B}' = \widehat{B}$, obtemos $\widehat{B} + \beta = 180$. De maneira análoga, obtemos $\widehat{C} + \delta = 180$. Resulta então que a soma dos ângulos do quadrilátero $BCC''B''$ é 360°, o que não pode acontecer na geometria hiperbólica. □



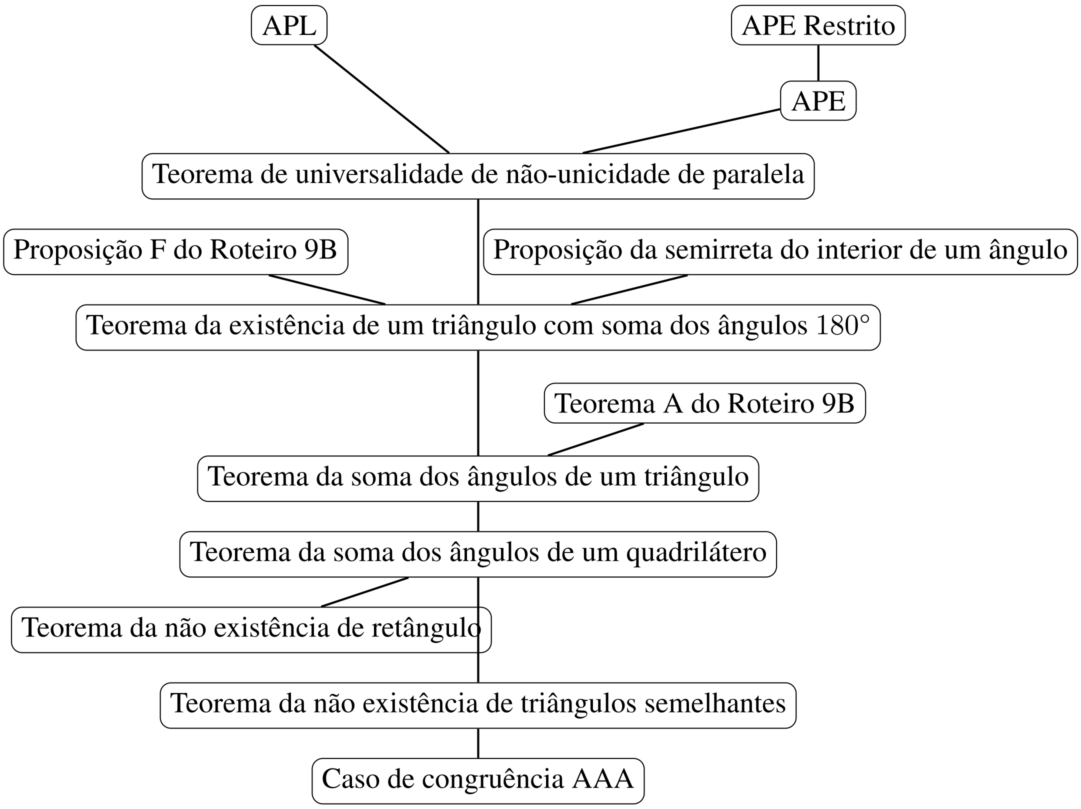
Item 10A.7. **Caso de congruência** AAA. Na geometria hiperbólica, AAA é caso de congruência de triângulos. {item:101:7}

Demonstração. Decorre imediatamente do teorema da não existência de triângulos semelhantes. □

Dos casos de congruência da geometria neutra e do último teorema decorre qee, na Geometria Hiperbólica, existem cinco casos de congruência de triângulos: LAL, ALA, LLL, LAA e AAA.

Observação. Um contra-exemplo para o caso ALL pode ser construido na geometria neutra, portanto este não é caso de congruência também em nenhuma das outras duas geometrias.

Item 10A.8. No diagrama abaixo, mostramos a hierarquia dos teoremas abordados neste roteiro. {item:101:8}


APL
APE Restrito
APE
Teorema de universalidade de não-unicidade de paralela
Proposição F do Roteiro 9B
Proposição da semirreta do interior de um ângulo
Teorema da existência de um triângulo com soma dos ângulos 180°
Teorema A do Roteiro 9B
Teorema da soma dos ângulos de um triângulo
Teorema da soma dos ângulos de um quadrilátero
Teorema da não existência de retângulo
Teorema da não existência de triângulos semelhantes
Caso de congruência AAA

10.2 Roteiro 10B. Retas Paralelas

Roteiro 10B. Geometria Hiperbólica: Retas paralelas {roteiro:102}
Retas paralelas não são eqüidistantes. Não existem retas eqüidistantes. Retas paralelas que admitem uma perpendicular comum. Paralelas-limites e ângulo de paralelismo. Variação do ângulo de paralelismo. Classificação de retas paralelas. Modelo de Poincaré.

Retas paralelas não são equidistantes

O lema seguinte, que pode ser provado na geometria neutra, será útil para o estudo que vamos fazer neste roteiro.

Item 10B.1. {item:102:1}

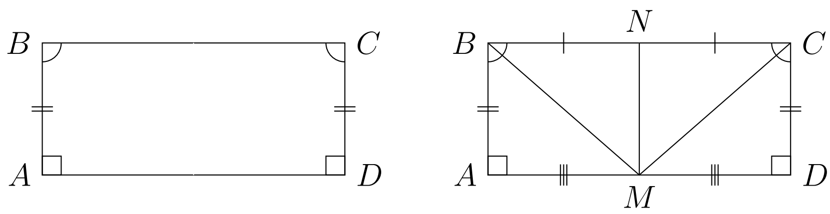
Lema 10.7. ***(GN) Lema do quadrilátero com dois ângulos retos***. *Seja $ABCD$ um quadrilátero em que $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$ são ângulos retos. Então*

(a) se $AB = CD$, então $\widehat{B} = \widehat{C}$;

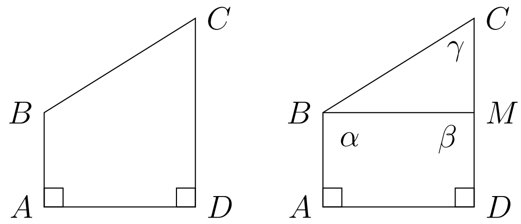
(b) se $AB < CD$, então $\widehat{C} < \widehat{B}$;

(c) se $\widehat{C} < \widehat{B}$, então $AB < CD$.

Demonstração. Na parte (a), tem-se o que se chama de quadrilátero de Saccheri (dois ângulos retos e dois lados iguais; figura abaixo, à esquerda). Para provar que $AB =^C$, traça-se a perpendicular unindo os pontos médios M e N dos lados AD e BC, constrói-se os quatro triângulos indicados na figura abaixo, à direita. Trabalhando com congruência de triângulos, primeiro com os triângulos inferiores (caso LAL) e depois com os triângulos superiores (caso LLL), o leitor não terá dificuldade em provar que os ângulos B e C são iguais, como soma de ângulos iguais. (Eles são retos na geometria euclidiana e agudos na geometria hiperbólica).



Parte (b). Tomamos o ponto M em CD de modo que $DM = AB$. Então $BADM$ é um quadrilátero de Saccheri e, pela parte (a), os ângulos a e R são iguais (figura abaixo, à direita). Precisamos mostrar que a semi-reta S_{BM} está no interior do ângulo ABC porque assim teremos o seguinte: $\widehat{B} > \alpha$ e β é ângulo externo do triângulo BMC. Portanto, $\beta > \gamma$, donde $\widehat{B} > \gamma$ que é o que queremos provar.



Para mostrar que, de fato, a semi-reta S_{BM} está no interior do ângulo ABC, basta mostrar que o ponto M está no interior deste ângulo. Para isto, basta mostrar que D está no interior do ângulo ABC, pois então o segmento CD, sem o ponto C, também estará, e como M é um ponto do interior de CD, M estará no interior do ângulo ABC.

(1) $D \in H^A_{BC}$. Basta provar que o segmento AD não corta a reta BC. Para provar isto, sejam H_1 e H_2 os semiplanos determinados pela reta BM. Admitindo que $D \in H_1$, teremos $C \in H_2$, pois o segmento CD corta BM. Portanto, o segmento BC, sem o ponto B, está contido em H_2. Como $AD \parallel BM$, AD está contido em H_1. Logo, AD não corta BC.

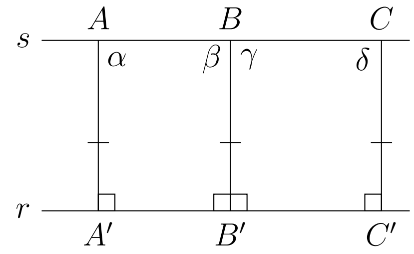
(2) $D \in H^C_{BA}$. Imediato, pois DC é paralelo à reta BA.

De (1) e (2) decorre que D está no interior do ângulo ABC. Portanto, M também está no interior deste ângulo, já que M pertence ao segmento CD.
Parte (c). Sendo $\widehat{C} < \widehat{B}$, queremos provar que $AB < CD$. Por absurdo, se fosse $AB = CD$, pela parte (a) teríamos $\widehat{C} = \widehat{B}$; se fosse $AB > CD$, pela parte (b) teríamos $\widehat{B} < \widehat{C}$. □

{item:102:2} ***Item 10B.2.***

Teorema 10.8. *Na Geometria Hiperbólica, não existem retas eqüidistantes. Não pode haver mais de dois pontos de uma reta s que estejam à igual distância de uma reta r.*

Demonstração. Por absurdo, suponhamos que existam A, B e C em s tais que os segmentos AA', BB' e CC', perpendiculares a r, sejam iguais, como mostra a figura. Os três quadriláteros $AA'B'B$, $BB'C'C$ e $AA'C'C$ são quadriláteros de Saccheri (os dois lados perpendiculares a s são iguais). Pelo Lema do quadrilátero com dois ângulos retos, os outros dois ângulos de cada quadrilátero são iguais. Com isto, os quatro ângulos α, β, γ, δ são iguais e, como $\beta + \gamma = 180$, segue-se que os quatro ângulos são retos, o que não pode acontecer na geometria hiperbólica, pois não existe retângulo. Logo, não podem existir 3 pontos de s eqüidistantes de r. □

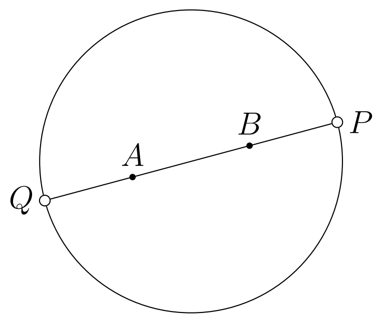


Item 10B.3. Dada uma reta r, como é o conjunto dos pontos que estão todos a uma mesma distância de r? Não pode ser uma reta, pois não existem retas eqüidistantes. Daremos um exemplo no modelo de Klein. {item:102:3}

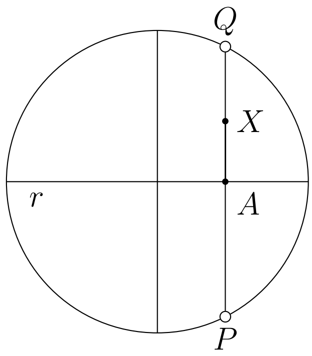
No Roteiro 7, definimos a distância de Klein, $d_K(A, B)$, entre dois pontos de Klein A e B, pela expressão:

$$d_K(A, B) = (1/2) \left| \ln \left(\frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP} \right) \right|$$

sendo P e Q as extremidades da corda que contém A e B ($\ln$ significa logaritmo neperiano).



No modelo de Klein, cujos pontos são os pontos interiores da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, vamos determinar o lugar dos pontos $X = (x_0, y_0)$, com $y_0 > 0$, cujas distâncias à reta de Klein r de equação $y = 0$ é 1. Para calcular a distância de um ponto $X = (x_0, y_0)$ ao ponto $A = (x_0, 0)$, pé da perpendicular baixada de X a r, observamos que a intersecção da reta AX com a circunferência são os pontos $P = (x_0, -\sqrt{1 - x_0^2})$ e $Q = (x_0, \sqrt{1 - x_0^2}$.



$$A = (x_0, 0)$$
$$X = (x_0, y_0)$$
$$P = \left(x_0, -\sqrt{1-x_0^2}\right)$$
$$Q = \left(x_0, \sqrt{1-x_0^2}\right)$$

A distância de X a A é dada por

$$d_K(X, A) = (1/2)\left|\ln\left(\frac{XP \cdot AQ}{XQ \cdot AP}\right)\right| = (1/2)\left|\ln\left(\frac{XP}{XQ}\right)\right|$$

Portanto, para determinar os pontos $X = (x_0, y_0)$ cuja distância a $A = (x_0, 0)$ é 1, devemos resolver a equação

$$\frac{1}{2}\left|\ln\frac{\sqrt{1-x_0^2}+y_0}{\sqrt{1-x_0^2}-y_0}\right| = 1$$

ou

$$\left|\ln\frac{\sqrt{1-x_0^2}+y_0}{\sqrt{1-x_0^2}-y_0}\right| = 2$$

Como o numerador da fração é maior que o denominador, a fração é maior que 1, o logaritmo é positivo e o módulo pode ser retirado. Obtemos, então,

$$\frac{\sqrt{1-x_0^2}+y_0}{\sqrt{1-x_0^2}-y_0} = e^2 \qquad (1)$$

e

$$\sqrt{1-x_0^2}+y_0 = e^2\left(\sqrt{1-x_0^2}-y_0\right) \qquad (2)$$

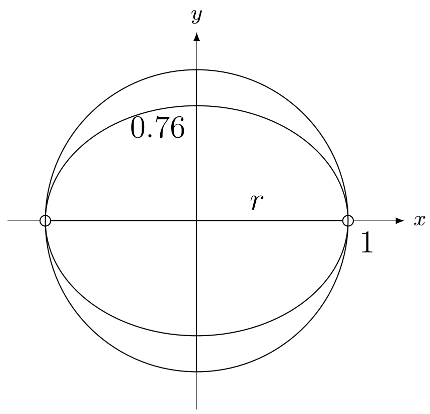
$$(e^2-1)\sqrt{1-x_0^2} = (e^2+1)y_0 \qquad (3)$$

$$(e^2-1)^2(1-x_0^2) = (e^2+1)^2y_0^2 \qquad (4)$$

e,finalmente

$$x_0^2 + \frac{y_0^2}{\left(\frac{e^2-1}{e^2+1}\right)^2} = 1 \qquad (5)$$

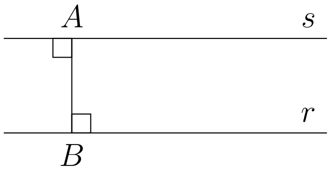
Isto mostra que os pontos $X = (x_0, y_0)$, sendo $y_0 > 0$, estão na metade superior da elipse cartesiana de semi-eixos 1 e $\frac{e^2-1}{e^2+1}$ (aproximadamente 0,76). Resta saber se todo ponto e 2 + 1 da semi-elipse superior satisfaz a equação original. Isto acontece porque as operações algébricas requeridas para ir da equação (5) para a (1) fazem retornar às mesmas equações (o passo crítico é o que vai de (4) para (3): ao se extrair a raiz quadrada de ambos os membros de (4) obtemos a equação (3) e outra equação com um sinal negativo no primeiro membro; acontece que esta nova equação não tem soluções, do que resulta que toda solução de (4) é solução de (3)). A figura abaixo ilustra a elipse completa. Isto significa que o lugar dos pontos cuja distância de Klein à reta r é 1 é uma curva. Como se vê, isto é diferente do que acontece na geometria euclidiana, em que o lugar dos pontos eqüidistantes de uma reta é uma reta paralela a ela. Como vimos, na geometria hiperbólica não existem retas eqüidistantes.

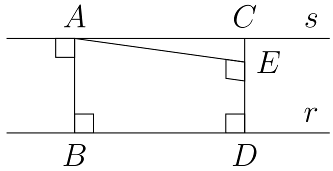


A elipse, sem os pontos que estão na cirumferência, é o lugar dos pontos de Klein cuja distância de Klein à reta r é 1.

Retas paralelas que admitem uma perpendicular comum

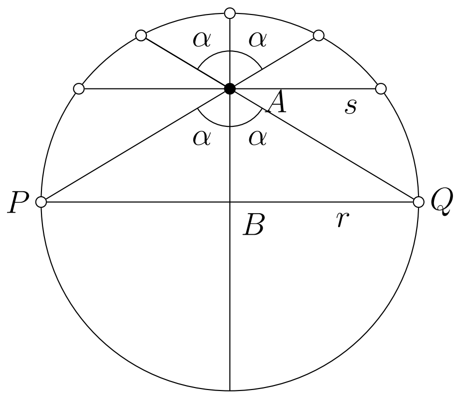
Item 10B.4. Existem retas paralelas que admitem uma perpendicular comum? {item:102:4}
Sim. O processo de construção é o das perpendiculares, que vale também na geometria neutra. Por um ponto de urna reta r, levantamos uma perpendicular t. Por um ponto A de t, levantamos uma perpendicular CD a s, D em s. Pelo Teorema dos ângulos alternos-internos, s é paralela a r, tendo t como perpendicular a ambas. Uma questão adicional é a seguinte: como construir por A outra paralela a r? Por outro ponto C de s baixamos uma perpendicular CD a r, D em r. Por A, baixamos uma perpendicular AR a CD, E em CD. Pelo Teorema dos ângulos alternos-internos, AR é paralela a BD, sendo ED uma perpendicular comum às retas AE e BD. Por que AR é diferente de AC? Porque se AE coincidisse com AC, $ABDC$ seria retângulo, o que não existe na geometria hiperbólica. Se a construção estivesse sendo feita na geometria euclidiana, AR coincidiria com AC.



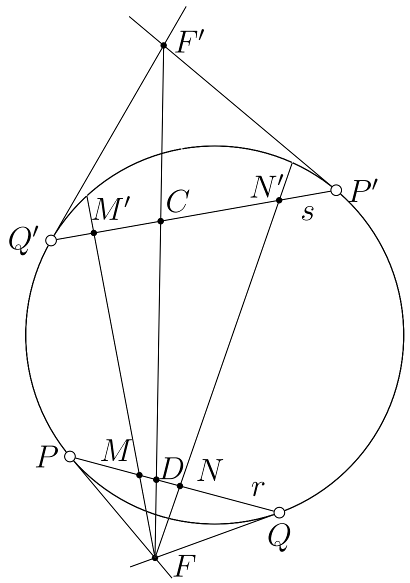


Não se precipite o leitor pensando que duas retas paralelas sempre têm uma perpendicular comum.

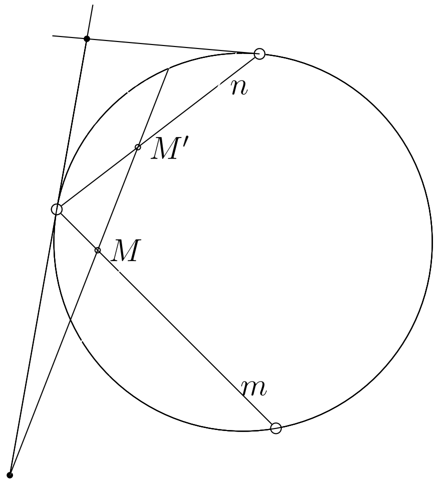
{item:102:5} ***Item 10B.5.*** Exemplo de retas paralelas que admitem perpendicular comum e de retas paralelas que não admitem perpendicular comum, no modelo de Klein.
A figura abaixo, á esquerda, exibe, no modelo de Klein, uma reta r, que é um diâmetro, e um ponto A fora de r, que está no diâmetro perpendicular a r [No caso de diâmetro, perpendicular de Kleín é o mesmo que perpendicular cartesiana]. Uma das paralelas a r por A, a reta s, é obtida pelo método das perpendiculares: ela é perpendicular à reta AB que, por sua vez, é perpendicular à r. Portanto, r e s admitem uma perpendicular comum. Na mesma figura, duas paralelas a r por A se destacam, as representadas pelas cordas que terminam em P e Q, que são as extremidades da corda que representa r. Elas são chamadas paralelas-limites porque separam a região que contém as retas paralelas a r que passam por A da região que contém as retas que passam por A que não são paralelas à r. Como veremos, essas retas formam com AB ângulos iguais, indicados por α na figura e denominados *ângulos de paralelismo*.



O pólo de uma corda cartesiana é o ponto de interseção das retas tangentes à circunferência pelas extremidades da corda (isto é feito fora do círculo de Klein). Um diâmetro não tem pólo porque as tangentes pelas extremidades são paralelas. Prova-se que, no modelo de Klein, duas retas de Klein são perpendiculares se e somente se o prolongamento cartesiano de uma passa pelo pólo da outra. Quando uma das retas é diâmetro, perpendicular no sentido de Klein é o mesmo que no cartesiano.



Na figura do meio, acima, a reta CD é perpendicular a r e a s, porque o seu prolongamento cartesiano passa pelos pólos das cordas. Essas retas paralelas que admitem urna perpendicular comum têm as seguintes propriedades. CD é o único segmento perpendicular comum às retas paralelas r e s, pois só existe uma reta cartesiana que. passa pelos dois pólos. Como veremos na teoria, é o menor dos segmentos que se pode traçar ligando ponto de s a ponto de r. Também, se C é ponto médio do segmento $M'N'$ e os segmentas $M'M$ e $N'N$ são perpendiculares a r, então os comprimentos de $M'M$ e $N'N$ são iguais. Outro fato é o de que o comprimento de $M'M$ (distância de M' à r) cresce quando M' tende para a extremidade da corda, tendendo para infinito, o mesmo acontecendo com $N'N$ (todos esses, são fatos que serão provados em abstrato na geometria hiperbólica).



Já com as retas paralelas-limites acontece o seguinte:

i Não existe uma perpendicular comum a duas retas paralelas-limites. Na figura acima, à direita, as retas m e n são paralelas-limites; os seus pólos estão numa mesma tangente à circunferência - por serem as tangentes perpendiculares ao raio que toca o ponto de tangência - e, assim, a única reta que une os dois pólos não passa pelo interior da circunferência.

ii A distância entre pontos de duas retas paralelas-limites tende para zero ou para infinito, conforme o sentido com que o ponto de uma delas tende para infinito. Dizemos que as paralelas-limites são *assintóticas* no sentido em que a distância entre elas tende para zero. O sentido de uma reta é definido por um sistema de coordenadas dado pelo axioma da régua. Outro fato é o de que não existem dois pontos de uma delas que sejam eqüidistantes da outra.

{item:102:6} ***Item 10B.6.***

Teorema 10.9. ***Teorema das retas que admitem perpendicular comum****. Quando existe um segmento perpendicular comum AB às retas paralelas s e r tem-se:*

(a) ele é único;

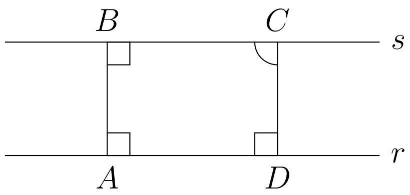
(b) é o menor segmento que liga pontos de s a pontos de r;

(c) para cada ponto C de s, seja C' o ponto de s, na ordem $C' * B * C$, sendo $C'B = CB$; então C' e C são eqüidistantes de r;

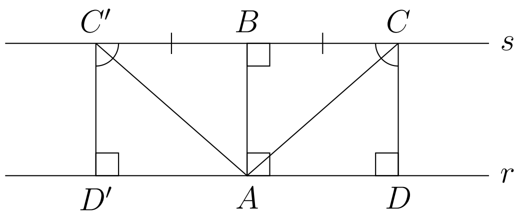
(d) a distância de cada ponto de s a r cresce à medida que o ponto se afasta de B, tanto para um lado quanto para o outro (cresce tendendo para infinito?)

Demonstração. (a) Não pode haver dois segmentos perpendiculares comuns a r e s, porque não existe retângulo na geometria hiperbólica.

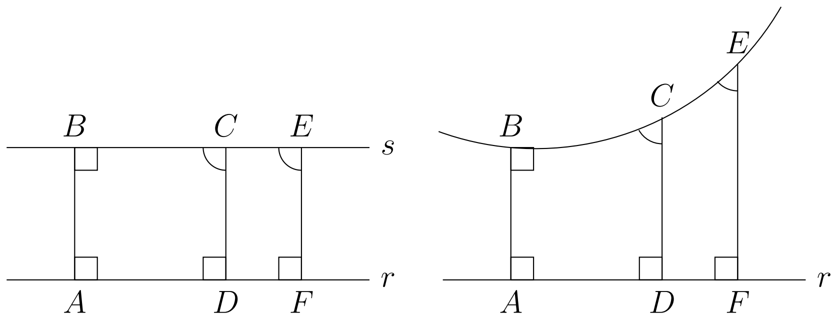
(b) Seja C um ponto de s. Baixamos uma perpendicular CD a r. No quadrilátero $ABCD$, o ângulo C é agudo (pois a soma dos ângulos é menor que 360°). Pelo Lema do quadrilátero com dois ângulos retos, temos $AB < CD$ (tem-se também $AD < BC$). Como o segmento de qualquer obliqua é maior que o segmento de qualquer perpendicular, segue-se que AB é o menor dos segmentos com extremos em s e r.



(c) Seja agora C' um ponto de s na ordem $C' * B * C$, sendo $BC' = BC$. Seja $C'D'$ o segmento perpendicular a r. Queremos mostrar que $C'D' = CD$ (figura abaixo). Pelo caso de congruência LAL, $\triangle ABC = \triangle ABC'$. Agora, pelo caso LAA, temos $\triangle CAD = \triangle C'AD'$. Portanto, $C'D' = CD$.

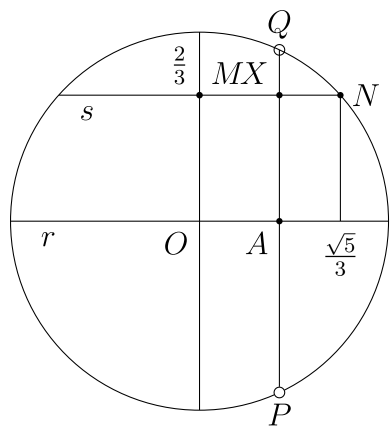


(d) Seja agora um ponto E de s, mais afastado de B que C, na ordem $B * C * E$ (figura abaixo). No quadrilátero $DCEF$, o ângulo C, que é obtuso, é maior que o ângulo E, que é agudo. Logo, pelo Lema do quadrilátero com dois ângulos retos, $CD < EF$. No outro lado de B, o mesmo acontece, em virtude do item (c). A figura à direita é melhor para destacar os segmentos de maiores comprimentos.



□

{item:102:7} ***Item 10B.7.*** Um exemplo para ilustrar o Teorema das retas que admitem perpendicular comum, no modelo de Klein.
No modelo de Klein, consideremos as retas r e s, de equações cartesianas $y = 0$ e $y = 2/3$, respectivamente. Verifiquemos o que acontece com a distância de um ponto $X = (x_0, 2/3)$ de s a r, que é o comprimento da perpendicular XA, no modelo de Klein, sendo $A = (x_0, 0)$.



Usando a expressão da distância dada no item 2, a distância de X a A é dada por

$$d_K(X, A) = \frac{1}{2}\left|\ln \frac{\sqrt{1 - x_0^2} + \frac{2}{3}}{\sqrt{1 - x_0^2} - \frac{2}{3}}\right| = \ln \frac{\sqrt{1 - x_0^2} + \frac{2}{3}}{\sqrt{1 - x_0^2} - \frac{2}{3}}$$

Um ponto de intersecção da reta s com a circunferência é $N = (\sqrt{5}/3, 2/3)$. Quando X tende para N, a abscissa x_0 tende para $\sqrt{5}/3$. Então, o numerador da fração tende para $4/3$, o denominador tende para 0 e a fração tende para ∞. Portanto, a distância tende para infinito. Como é fácil de perceber, para cada ponto X, à direita de M, existe um ponto X', à esquerda de M, cuja distância a r é a mesma que a distância de X a r, de modo que, quando X' tende para o extremo da corda s, a distância de X' a r tende também para ∞.

Paralelas-limites e ângulo de paralelismo

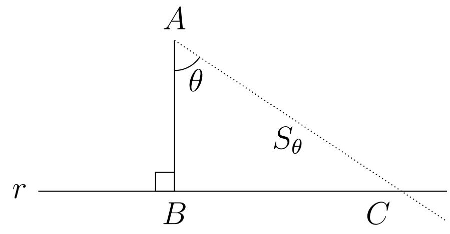
Nesta seção, definiremos retas paralelas-limites. Para provar que elas existem, precisamos utilizar a continuidade dos números reais. Há várias maneiras de expressar esta continuidade. Uma delas é a propriedade do supremo de um conjunto de números reais.

Item 10B.8. Supremo de um conjunto de números reais. {item:102:8}
Consideremos os seguintes intervalos de números reais: $A = [0, 30)$ e $B = [0, 30]$. O primeiro é aberto à direita (o número 30 não pertence a A) e o segundo é fechado à direita (o número 30 pertence a B). Uma **cota superior** para um conjunto K de números reais é um número c tal que $x < c$ para todo $x \in K$. Um conjunto é **limitado superiormente** se possui cota superior. Os conjuntos A e B são limitados superiormente pois possuem cota superior, por exemplo, 30 ou qualquer outro número maior que 30. O número 30 é a menor das cotas superiores para A e para B. Um número a é a **menor cota superior** ou **supremo** para um conjunto K se
(i) a é uma cota superior para K e
(ii) nenhum número $b < a$ é cota superior para K; equivalentemente, se $b < a$ então existe $k \in K$ tal que $k > b$.
O supremo de um conjunto pode ou não pertencer ao conjunto. O número 30, supremo de A e de B, pertence a B, mas não pertence a A.
Existência de supremo: todo conjunto não vazio de números reais limitado superiormente possui um e um só supremo.
A existência de supremo é uma propriedade fundamental do conjunto dos números reais. Numa apresentação axiomática dos números reais ela é um axioma; numa construção a partir dos números naturais ela é um teorema.

Item 10B.9. {item:102:9}

Definição 10.1. ***Definição de semirretas paralelas-limites e de ângulo de paralelismo****. Dados uma reta r e um ponto A fora de r, seja AB perpendicular a r, com B em r, e seja H_1 um dos semiplanos determinado por AB. Seja K o conjunto das medidas dos ângulos θ que as semirretas S_θ com origem A, contidas em H_1 e que cortam r fazem com S_{AB}:*

$$K = \{\theta;\ S_\theta \text{ corta } r\}.$$



*O conjunto K é limitado superiormente. O número α = supremo de K é denominado **ângulo de paralelismo associado à reta** r **e ao ponto** A. A semirreta contida em H_1 que tem origem em A e faz um ângulo α com S_{AB} é denominada **semirreta paralela-limite a** r **pelo ponto** A. No outro semiplano determinado por AB definimos outra semirreta paralela-limite com o correspondente ângulo de paralelismo.*

{item:102:10} ***Item 10B.10.***

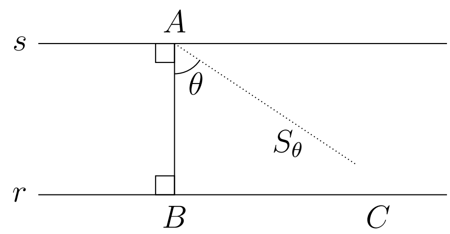
Teorema 10.10. *Teorema da semirreta paralela-limite. Seja r uma reta, seja A um ponto fora de r e seja AB um segmento perpendicular a r, B em r. Seja H um dos semiplanos determinados pela reta AB. Usamos a notação S_theta para indicar a semirreta contida em H, que faz um ângulo O com AB. Seja a o ângulo de paralelismo e seja Sa a paralela-limite a r pelo ponto A. Então*

(a) S_α não corta r;

(b) Se $\beta < \alpha$, então S_β corta r;

(c) Se $\gamma > \alpha$, então S_γ, não corta r.

Demonstração. Seja AB uma perpendicular traçada de A a r, com B em r. Seja s a perpendicular a AB por A; s é paralela a r por A. Para cada número θ entre O e 180 existe uma semirreta S_θ com origem em A, com interior contido em H, e que faz um ângulo O com a semi-reta S_{AB} (figura abaixo).



Dentre elas, consideremos as semi-retas S_θ que cortam r. Seja K o conjunto dos números que são as medidas dos ângulos que essas semi-retas que cortam r fazem com S_{AB}:

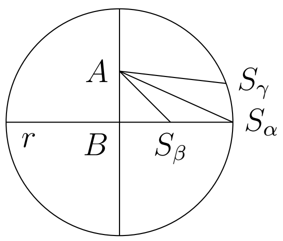
$$K = \{P;\ S_\beta \text{ corta } r\}.$$

β é < 90, K é limitado superiormente pelo número 90. O conjunto K também. não é vazio pois, sendo $C \in H$, C em r, a medida do ângulo $B\widehat{A}C$ pertence a K. Logo, K tem um supremo α. Pela definição de supremo, a tem as seguintes propriedades:

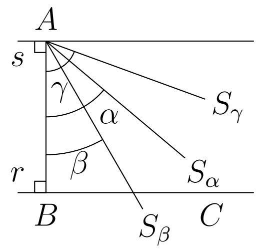
(i) α é uma cota superior para K e

(ii) nenhum número menor que a é cota superior para K; equivalentemente: se $\beta < \alpha$, então existe $\theta \in K$ tal que $\theta > \beta$.

A figura abaixo mostra algumas semirretas traçadas pelo ponto A, à esquerda no modelo de Klein e, à direita, em abstrato. No modelo de Klein, percebe-se o fato de que a paralela limite S_α, separa as semi-retas S_β que cortam r, das semi-retas S_γ que são paralelas a r.



S_α é paralela-limite a r.
S_α corta r, $\beta < \alpha$.
S_γ é paralela a r, $\gamma > \alpha$.
À esquerda,
no modelo de Klein.
À direita,
em abstrato.



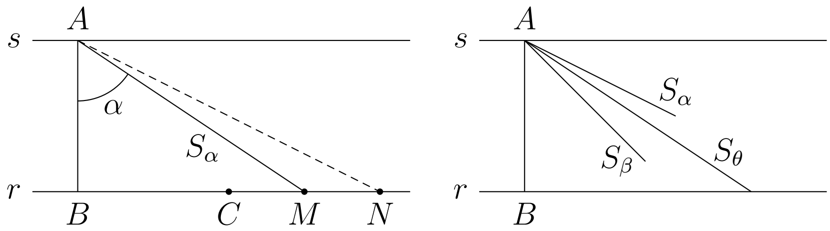
Passemos à demonstração das propriedades enunciadas.

(a) *A semirreta paralela-limite S_α não corta r.* De fato, se S_α cortasse r num ponto M, tomaríamos um ponto N à direita de M ($B * M * N$) e teríamos uma semi-reta S_{AN} cortando r, fazendo um ângulo β com S_{AB} maior que α. Teríamos então em K um número β maior que α, contrariando o fato de que α é supremo de K. Veja a figura abaixo, à esquerda.

(b) *Se $\beta < \alpha$, então S_β corta r.* Pois, como $\beta < \alpha$, então β não é cota superior para K, porque a é a menor cota superior de K. Logo existe θ pertencente a K tal que $\theta > \beta$ (dizer que θ está em K é dizer que S_θ corta r). Como S_θ corta r, decorre do Teorema da semi-reta do interior de um ângulo (Roteiro 6B) que S_β corta r. Figura abaixo, á direita.

(c) *Se $\gamma > \alpha$, então S_γ não corta r*, pois se cortasse, S_α também cortaria r, pelo Teorema da semi-reta do interior de um ângulo, contrariando o fato de que S_α é paralela a r.

A semirreta S_α separa a região das semi-retas por A que cortam r da região das que não cortam, situadas de um lado de AB. É em virtude destas propriedades que denominamos S_α de semi-reta *paralela-limite a r pelo ponto A*. Observemos que do outro lado de AB existe uma outra paralela-limite a r. De cada lado de AB existe apenas uma semirreta paralela-limite à r, porque a menor cota inferior de um conjunto é única. □



S_α não pode cortar r $\quad$ $\beta < \alpha$, então S_α corta r

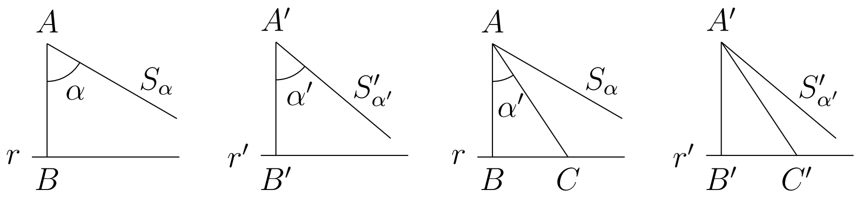
Perguntas: Pode o ângulo de paralelismo ser 90°? Não, pois se fosse 90°, pelo ponto A, passaria apenas uma paralela a r. O ângulo de paralelismo tem o mesmo valor, independentemente das posições da reta r e do ponto A? Ou melhor, se r' e A' são distintos de r e A, então o ângulo de paralelismo t associado a r e A é igual ao ângulo de paralelismo a' associado a r' e A'? Resposta: em geral α é diferente de α', mas $\alpha = \alpha'$ quando a distância de A a r é a mesma que a distância de A' a r'. É o que diz o teorema seguinte.

{item:102:11} ***Item 10B.11.***

Teorema 10.11. *O ângulo de paralelismo associado à reta r e ao ponto A só depende da distância de A a r (ou seja, se a distância de A' à r' é igual à distância de A à r, então os ângulos de paralelismos associados a cada um dos pares são iguais).*

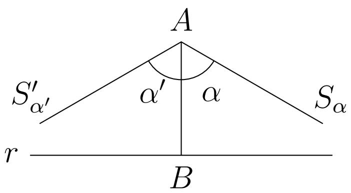
Hipótese: A' está fora de r' e A está fora de r; $d(A', r') = d(A, r)$; $\alpha =$ ângulo de paralelismo associado a r e A, $\alpha' =$ ângulo de paralelismo associado a r' e A'.
Tese: $\alpha = \alpha'$.

Demonstração. Sejam B e B' os pés das perpendiculares baixadas de A a r e de A' a r', respectivamente e sejam S_α, e $S'_{\alpha'}$ paralelas limites associadas a A e r e a A' e r', respectivamente.



Suponhamos que $\alpha' < \alpha$. A semi-reta que passa por A fazendo um ângulo α' com SAB corta r em um ponto C, pois S_α, é paralela limite. Tomemos um ponto C' em r' de modo que $B'C' = BC$, como mostra a figura. Pelo caso LAL de congruência de triângulos, $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Portanto, o ângulo $B'A'C'$ é igual a α', donde $S'_{\alpha'} = S_{AC}$ o que é impossível, pois $S'_{\alpha'}$, é paralela a r. Portanto, não pode ser $\alpha' < \alpha$. De maneira análoga, também não pode ser $\alpha' > \alpha$. Logo, $\alpha' = \alpha$. □

Decorre deste Lema que o **ângulo de paralelismo a da paralela-limite situada no lado esquerdo da reta AB é igual ao da direita** (figura abaixo).



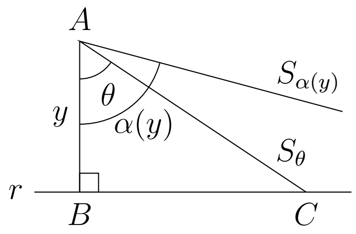
Mostraremos, agora, que o ângulo de paralelismo a associado a A e a r, como função $\alpha(y)$ da distância y de A a r, é contínua e decrescente. Quanto maior a distância, menor é o ângulo de paralelismo.

Item 10B.12. Teorema da variação do ângulo de paralelismo. Sejam r uma reta e A um ponto fora de r. Seja B o pé da perpendicular t baixada de A a r. Denotemos por y a distância de A a B e por $\alpha(y)$ o ângulo de paralelismo associado a A e r, A em t. Então $\alpha(y)$ é uma função contínua e decrescente, para $0 < y < \infty$. Quando $y \to 0$, $\alpha(y)$ tende para 90 e quando $y \to \infty$, $\alpha(y)$ tende para 0. {item:102:12}

Demonstração. (a) Quando $y \to 0$, o ângulo de paralelismo $\alpha(y)$ tende para 90.

Na figura abaixo, y é a distância do ponto A à reta r, B é o pé da perpendicular baixada de A a r. Seja $0 < \alpha(y)$ e seja C o ponto em que a semi-reta S_θ, que faz um ângulo θ com S_{AB}, corta r. O ângulo $\alpha(y)$ que a paralela limite $S_{\alpha(y)}$ faz com S_{AB} é a menor cota superior (supremo) para o conjunto dos ângulos θ. A soma dos ângulos do triângulo $\triangle ABC$ é $90 + O + \widehat{C}$. Mantidos fixos os pontos B e C, e fazendo y tender para 0, o ponto A tenderá para o ponto

B. Mostraremos que, ao fazer isto, a soma dos ângulos do triângulo tenderá para 180, donde a soma $\theta + AC$ tenderá para 90 e, como o ^{C} tenderá para 0, o ângulo θ tenderá para 90. Isto fará com que o ângulo de paralelismo $\alpha(y)$, que é a menor cota superior para o conjunto dos números θ, também tenda para 90.



Para o que queremos fazer, ao invés de trabalhar com a soma dos ângulos do $\triangle ABC$, é melhor trabalhar com a diferença entre 180 e a soma dos seus ângulos, um conceito denominado de deficiência do triângulo, denotada por $\mathrm{def}(\triangle ABC)$. Quanto menor a deficiência, maior é soma dos ângulos do triângulo. Assim,

$$\mathrm{def}(\triangle ABC) = 180 - \left(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}\right).$$

A partir do $\triangle ABC$ construiremos uma seqüência de triângulos $\triangle P1BC$, $\triangle P2BC$, ..., com os pontos P_1, P_2, , se aproximando de B, cada um com deficiência igual à metade da do anterior. O primeiro triângulo $\triangle P_1BC$ é construído traçando-se a bissetriz CP_1 do $\widehat{C}$ (figura abaixo, à esquerda).

É fácil provar a propriedade da *aditividade da deficiência*: quando se decompõe um triângulo por um segmento que liga um vértice ao lado oposto, da maneira como foi feita com o $\triangle ABC$, tem-se

$$\mathrm{def}(\triangle ABC) = \mathrm{def}(\triangle P_1BC) + \mathrm{def}(\triangle AP_1C).$$

Agora, traçando-se P_1D perpendicular a AC (figura do meio), temos $\triangle P_1DC = \triangle P_1BC$, pelo caso LAA; logo,

$$\mathrm{def}(\triangle AP_1C) = \mathrm{def}(\triangle AP_1D) + \mathrm{def}(\triangle P_1DC) = \mathrm{def}(\triangle AP_1D) + \mathrm{def}(\triangle P_1BC).$$

Voltando à primeira igualdade obtemos

$$\mathrm{def}(\triangle ABC) = \mathrm{def}(\triangle P_1BC) + \mathrm{def}(\triangle AP_1C) = 2\times\mathrm{def}(\triangle P_1BC) + \mathrm{def}(\triangle AP_1D).$$

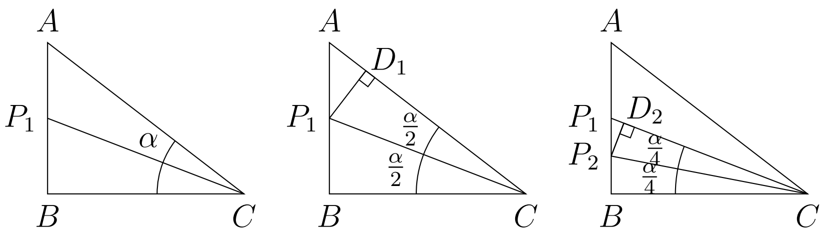
Desta última, obtemos

$$\mathrm{def}(\triangle P_1BC) < (1/2)\,\mathrm{def}(\triangle ABC).$$

Com processo semelhante, obtemos (figura abaixo, à direita)

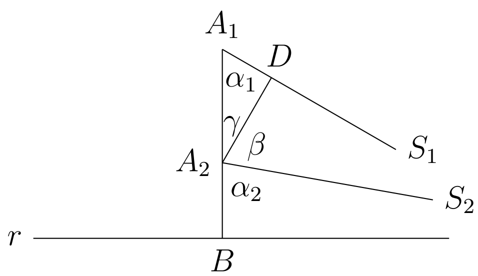
$$\operatorname{def}(\triangle AP_2C) < (1/2)\operatorname{def}(\triangle P_1BC) < (1/4)\operatorname{def}(\triangle ABC),$$

sendo CP_2 a bissetriz do ângulo $B\widehat{C}P_1$.



Recapitulamos a construção feita. No segmento AB construímos uma seqüência de pontos P_1, P_2, ... , P_n, obtidos pela interseção das bissetrizes de sucessivos ângulos, seqüência esta que tende para B. A deficiência do $\triangle P_nBC$ é menor que $(1/2^n) \times \triangle ABC$, tendendo, pois, para 0, quando $n \to \infty$. Como conseqüência, a soma dos ângulos desses triângulos tende para 180 e, como a medida do ângulo C tende para zero, a medida do ângulo θ tende para 90. Isto força $\alpha(y)$ tender para 90 também, por ser cota superior do conjunto dos números θ.

(b) $\alpha(y)$ é decrescente. Sejam $y_1 = A_1B$, $y_2 = A_2B$, $a_1 = a(y_1)$, $a_2 = a(y_2)$, S_1 paralela-limite associada a A_1 e r, $S_2 =$ paralela-limite associada a A_2 e r. Na figura abaixo, A_2D é perpendicular a S_1. Prova-se (!) que S_2 é paralela-limite associada a A_2 e S_1, com ângulo de paralelismo que indicaremos por $I3$, de medida < 90. Queremos mostrar que, sendo $y_1 > y_2$, então $a_1 < a_2$. Como $\beta < 90$, temos $a_2 + y > 90$. Por outro lado, no $AA1A2D$, $ai + y < 90$; logo, $a_1 + y < 90 < a_2 + y$, donde $a_1 < a_2$, como queríamos demonstrar.



(c) $\alpha(y)$ é contínua. Vamos mostrar que $\alpha(y)$ é contínua num ponto qualquer y_1. Com as notações anteriores, queremos mostrar que, quando $y_2 \to y_1$, teremos $\alpha_2 \to \alpha_1$. Esta propriedade caracteriza o conceito de continuidade de $\alpha(y)$ no ponto y_1. Quando $A_2 \to A_1$, pelo item (a), $p90$, donde $\alpha_2 + y$ tende para 90. Pelo argumento do item (a), a $\mathrm{def}(\triangle A_1 D A_2)$ tende para 0, quando A_2 tende para A_1. Logo, $\alpha_1 + \gamma$ tende para 90. Portanto, a diferença $(\alpha_2 + \gamma) - (\alpha_1 + \gamma) = \alpha_2 - \alpha_1$ tende para zero, donde $\alpha_2 \to \alpha_1$.

□

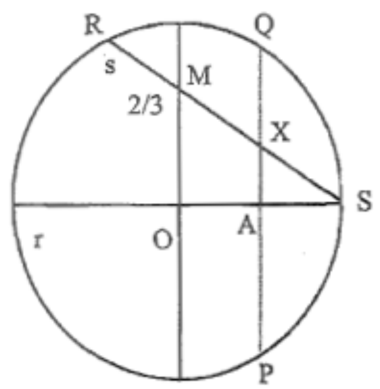
{item:102:13} ***Item 10B.13.***

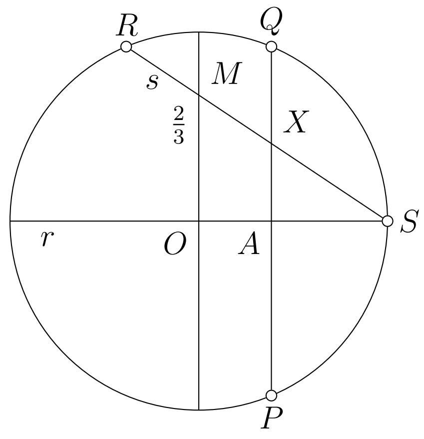
Teorema 10.12. ***Teorema da classificação de retas paralelas***. *Existem dois tipos de retas paralelas: as que admitem perpendicular comum e as que não admitem perpendicular comum. As retas paralelas que não admitem perpendicular comum são as retas paralelas-limites. A distância entre retas paralelas-limites tende para zero num sentido e para infinito no outro sentido.*

Omitimos a demonstração.

{item:102:14} ***Item 10B.14.*** Um exemplo para ilustrar o caso das paralelas-limites, no modelo de Klein.

Na figura abaixo, no modelo de Klein, r é uma reta e s é uma paralela-limite a r pelo ponto M, sendo R e S os pontos extremos da corda que representa s. Sendo X um ponto de s, mostraremos que quando $d_K(X, A)$ tende para 0 ou ∞, conforme X tenda para S ou R, respectivamente.





A equação cartesiana da reta s é $y = -(2/3)x + 2/3 = 2/3(1-x)$, que corta a circunferência nos pontos $R = (-5/13, 12/13)$ e $S = (1, 0)$.
Um ponto $X = (x_0, y_0)$ de s é da forma $X = (x_0, 2/3(1-x_0))$. A reta AX, com A em r, perpendicular a r, corta a circunferência nos pontos $P = (x_0, -\sqrt{1-x_0^2})$ e $Q = (x_0, \sqrt{1-x_0^2})$. Portanto,

$$d_K(X, A) = \frac{1}{2}\left|\ln\left(\frac{XP \cdot AQ}{XQ \cdot AP}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\ln\left(\frac{XP}{XQ}\right)\right|$$

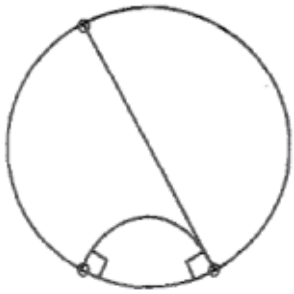
$$= \frac{1}{2}\left|\ln\frac{\sqrt{1-x_0^2}+y_0}{\sqrt{1-x_0^2}-y_0}\right|$$

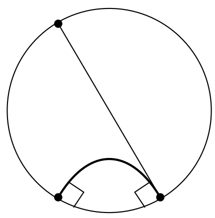
Agora, calculamos os limites de $d_K(X, A)$ quando X tende para R e depois quando X tende para S.
Quando X tende para R, temos $x_0 \to -5/13$, $y_0 \to 12/13$, o numerador da expressão de $d_K(X, A)$ tende para $24/13$ e o denominador tende para 0. Logo, $d_K(X, A)$ tende para ∞.
Quando X tende para S, temos $x_0 \to 1$, $y_0 \to O$, o numerador e o denominador da expressão de $d_K(X, A)$ tendem ambos para 0 e temos uma indeterminação da forma $0/0$. Para "levantar a indeterminação", dividimos numerador e denominador pela expressão que contém a raiz quadrada e observamos que

$$\frac{y_0}{\sqrt{1-x_0^2}} = \frac{\frac{2}{3}(1-x_0)}{\sqrt{1-x_0^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(1-x_0)^2}{1-x_0^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1-x_0}{1+x_0}}$$

Quando $x_0 \to 1$, esta última expressão tende para 0, o numerador e o denominador da expressão de $d_K(X, A)$ tendem ambos para 1, o logaritmo tende para 0 e, assim, $d_K(X, A)$ tende para 0, como queríamos mostrar.

Item 10B.15. Modelo de Poincaré. À guisa de informação, descrevemos as representações de ponto e reta no modelo de Poincaré para a geometria hiperbólica. Como no modelo de Klein, toma-se uma circunferência cartesiana C. Os pontos de Poincaré são representados pelos pontos cartesianos do interior de C. Já as retas são representadas por arcos de circunferência perpendiculares à circunferência C, sem os extremos. Os diâmetros são também retas de Poincaré. Na figura, abaixo estão representadas duas retas paralelas-limites, uma por um arco de -circunferência e a outra por um diâmetro. Não provaremos aqui que esta representação satisfaz todos os axiomas da geometria hiperbólica. {item:102:1





10.3 Lista de Exercícios n. 10

A não ser que esteja explicito em contrário no enunciado do exercício, consideram-se em vigor todos os axiomas da geometria hiperbólica: os axiomas da geometria neutra mais o axioma de paralelismo de Lobatchevsky.

10.1. *Como se prova que o APE é independente dos axiomas da Geometria Neutra? [Use o modelo de Klein, que é um modelo para a geometria neutra também.]*

10.2. ***Lema da transversal**. Se r e s são retas paralelas e t corta s num ponto P, então t corta r. Prove e mostre que o APE é indispensável.*

10.3. ***Lema (transitividade de paralelismo)**. A relação de paralelismo é transitiva. Prove e mostre que o APE é indispensável.*

10.4. ***Recíproca dço teorema dos ângulos alternos-internos**. Se duas retas paralelas r e s são cortadas por uma transversal, então ângulos alternos-internos são iguais. Prove e mostre que o APE é indispensável. O axioma de congruência de triângulos é indispensável?*

10.5. ***Teorema dos ângulos colaterais internos.** Se duas retas paralelas r e s são cortadas por uma transversal, então a soma dos ângulos colaterais internos é 180°. Prove.*

10.6. ***O quinto postulado de Euclides**. Se duas retas são cortadas por uma transversal de modo que a soma de dois ângulos colaterais internos é <180°, então as duas retas se cortam. Prove.*

10.7. *Em um sistema axiomático, duas afirmações são equivalentes se, admitida uma delas como verdadeira, a outra pode ser provada. Mostre que, na Geometria Neutra, o APE é equivalente ao quinto postulado de Euclides.*

10.8. ***Teorema (soma dos ângulos de um triângulo)**. A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Prove.*

10.9. *Mostre que, na Geometria Neutra, o teorema da soma dos ângulos de um triângulo é equivalente ao APE.*

10.10. *Defina paralelogramo. Existe paralelogramo na geometria euclidiana? Você é capaz de construir um paralelogramo na geometria neutra? Se sim, já fica provado que existe paralelogramo na geometria hiperbólica também.*

10.11. *Na geometria neutra, prove que em um paralelogramo (a) cada vértice está no interior do ângulo oposto; (b) as diagonais se interceptam.*

10.12. *Prove todas as propriedades de paralelogramo que você conhece. Cite uma propriedade de paralelogramo que não vale no modelo de Klein.*

10.13. *Defina retângulo. Existe retângulo na geometria euclidiana?*

10.14. *Prove todas as propriedades de retângulo que você conhece.*

10.15. *Na ausência do axioma de congruência de triângulos você pode dizer que, se os quatro ângulos de um quadrilátero são retos, então ele é um retângulo? [Não; dê contra-exemplo no modelo de Moulton]*

10.16. *Definia lòsango. Existe losango na geometria euclidiana?*

10.17. *Prove todas as propriedades de losango que você conhece.*

10.18. *Defina quadrado. Existe quadrado na geometria euclidiana?*

10.19. *Prove todas as propriedades de quadrado que você conhece.*

10.20. *Se uma circunferência passa por um ponto interior e por um ponto exterior de outra circunferência, então as duas se interceptam? [Esta é uma questão dificil. Eu não espero que você saiba resolvê-la.]*

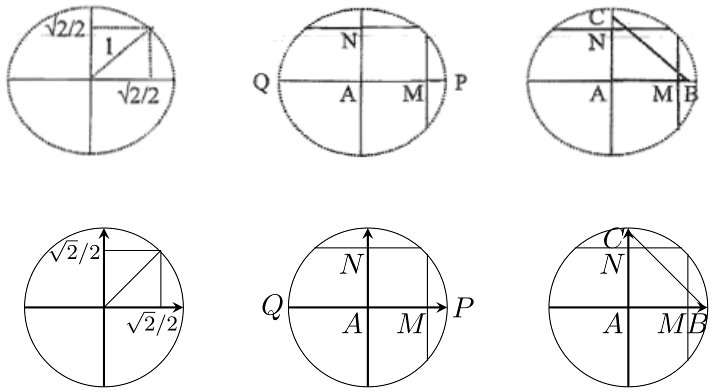
10.4 Soluções da Lista de Exercícios n. 10

10.8. *Dê um contra-exemplo para a afirmação xviii do item 10 do Roteiro 9B: as mediatrizes dos catetos de um triângulo retângulo se interceptam.*

Resposta:

Vamos construir, no modelo de Klein, um triângulo retângulo ABC em que as mediatrizes dos seus catetos não se interceptam. Tomamos o círculo de Klein com centro na origem do sistema de coordenadas e raio 1.

$N = (0, 3/4)$ $\quad$ $M = (3/4, 0)$ $\quad$ $B =?$ $\quad$ $C =?$



Passos da construção:

(1) Um vértice do triângulo é o ponto A, centro do círculo de Klein.

(2) Os catetos estão nos diâmetros que estão nos eixos coordenados.

(3) Tomaremos para mediatrizes as perpendiculares aos diâmetros passando pelos pontos $M = (3/4, 0)$ e $N = (0, 3/4)$ (figura acima, no centro). Como $3/4 > \sqrt{2}/2$, as mediatrizes são paralelas (veja figura acima, à esquerda).

(4) Procuramos o vértice $B = (x, 0)$ de modo que M seja ponto médio de AB. O terceiro vértice C é obtido de maneira análoga (figura acima, à direita).

Como determinar B?

Deveremos ter $d_K(A, B) = 2d_K(A, M)$, para que M seja ponto médio de AB.

Temos

$$dK(A, M) = (1/2)\,|\ln(AP.MQ)/(AQ.MP)| = (1/2)\,|\ln MQ/MP|$$

Portanto

$$d_K(A, M) = \frac{1}{2}\left|\ln \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}}\right| = \frac{1}{2}\ln 7$$

$$d_K(A,B)(1/2)\left|\ln(AP.BQ)/(AQ.MP)\right| = (1/2)\left|\ln(MQ)/(MP)\right|$$
$$d_K(A,B) = \frac{1}{2}\left|\ln\frac{1+x}{1-x}\right|$$

Relacionando as duas distâncias, obtemos

$$\frac{1}{2}\left|\ln\frac{1+x}{1-x}\right| = 2\times\frac{1}{2}\ln 7$$

donde

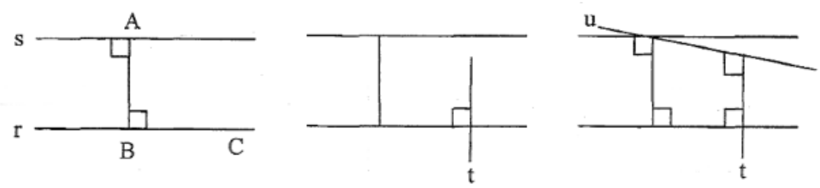
$$\frac{1+x}{1-x} = 49$$

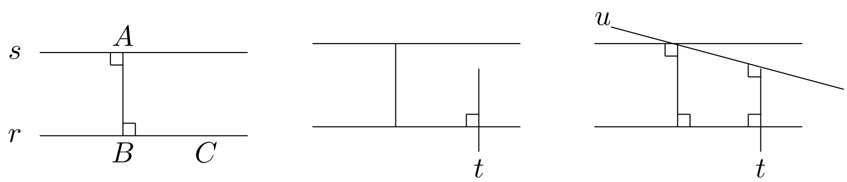
o que dá $x = 0,96$. Portanto, $B = (0,96;0)$ e devido à simetria $C = (0;0,96)$.

10.12. *Dada uma reta qualquer e dado um ponto fora da reta, mostre como construir mais de uma paralela à reta pelo ponto dado.* *[Depois de construir uma paralela pelo método das perpendiculares, levante uma perpendicular à reta dada por um de seus pontos e, pelo ponto dado, baixe uma perpendicular a esta última reta. Para demonstrar que esta última reta é diferente da paralela traçada pelo método das perpendiculares, use o fato de que não existe retângulo.]*

Resposta:

Na figura abaixo ilustramos a construção descrita. Se a reta u coincidisse com s, teríamos um retângulo, o que não pode existir na geometria hiperbólica. Que u é também paralela a r, decorre do fato de que u e r são perpendiculares a t.





10.13. *Prove que não existem retas eqüidistantes.* *[Mostre que não podem existir três pontos de uma reta que sejam eqüidistantes da outra.]*

Resposta:

Tome três pontos de uma das retas que são eqüidistantes da outra. Com isto, você obtém três quadriláteros de Saccheri. Estes quadriláteros têm os ângulos superiores iguais. Como dois deles são suplementares, todos eles são retos. Logo, os quadriláteros são retângulos, contrariando o fato de que não existe retângulo.

Capítulo 11

Todos

Todo list