Equações Diferenciais Ordinárias

Prof. Ole Peter Smith, PhD, IME/UFG

29 de junho de 2018

Equações Diferenciais Ordinárias Lista de exercícios em Equações Diferenciais Ordinárias

Sumário

1 EDOs de Ordem 1

Para a equação diferencial *linear* de ordem 1:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)x = q(x), \quad x \in I$$

onde p e q são funções contínuas no intervalo I, a solução completa é dado por:

$$y(x) = e^{-P(x)} \cdot \left\{ \int e^{P(x)} q(x) dx + c \right\}.$$

Onde: $P(x) = \int p(x)dx$. Nota-se: A Solução Completa da Equação Inhomogênea (SCEI) é a Solução Completa da Equação Homogênea (SCEH) mais uma Solução Particular da Equação Inhomogênea (SPEI).
Para a equação diferencial *separável* de ordem 1:

$$f(y)dy = g(x)dx, \quad x, y \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

onde f e g são funções contínuas no intervalo I, com primitivos F resp. G, a solução completa é dado por:

$$F(y) = \int f(y)dy = G(x) + c = \int g(x)dx + c, \quad c\mathbb{R}$$

Ou mais especificamente:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{t_0}^{t} g(t)dt$$

Considere a forma diferencial:

$$\omega = L(x,y)dx + M(x,y)dx = 0, (x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

Os pontos singulares da ω, são os pontos: $L(x,y) = M(x,y) = 0$. A forma diferencial é dita *Exato*, se eixste uma função diferenciavel, $F(x,y)$, tal que $dF = \omega$. Neste caso, a função $F(x,y)$ é chamada a função *Potencial*. A forma ω é exato, se e somente se, integrais de curva somente dependem da posição inicial e final, ie não dependem do caminho.
Um outro resultado é, que se a forma ω é exata, então ela é *fechada*:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}$$

Do outro lado, se ω é fechada e Ω é aberta e de forma estrela, então ω é exata.

Teorema 1 *(Teorema de Existência e Unicidade para formas diferenciais).*
Seja $\Omega \in \mathbb{R}$ aberta *e $L(x,y)$ e $M(x,y)$ $C^1(\Omega)$, tal que $(L(x,y), M(x,y)) \neq (0,0)$ em todo Ω, então em cada Ponto, $(x,y) \in \Omega$, passa uma e somente uma solução para:*

$$L(x,y)dx + M(x,y)dy = 0$$

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@mat.ufg.br - http://www.ime.ufg.br/docentes/olepeter

1.1 Exercícios:

1.1 Encontrar, usando o método de separação das variáveis, a solução completa das equações diferenciais abaixo. Encontre também a solução maximal, $\varphi(t)$, passando pelo elemento de linha indicado:

(a) $\frac{dx}{dt} = \frac{5t}{x}, \quad t \in \mathbb{R}, \ \ x \neq 0 \ . \ \varphi(0) = 1.$

(b) $\frac{dx}{dt} + 2te^x = 0 \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2 \ . \ \varphi(0) = 0.$

(c) $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x}t^3, \quad t \in \mathbb{R}, \ \ x \in \mathbb{R}_+ \ . \ \varphi(0) = 1.$

(d) $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2-x}{t}, \quad t > 0, \ \ x > 1 \ . \ \varphi(1) = 2.$
Hint:

$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

1.2 Encontrar as soluções maximais das seguintes equações diferenciais
Gabarito: Fórmula geral:

$$x(t) = e^{-P(t)} \left\{ \int q(t) e^{P(t)} dt + c \right\}, \in I$$

c arbitrário em $\mathbb{R}$.

(a) $\frac{dx}{dt} - 3x = e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R},$
Gabarito: $q(t) = e^{2t} \in C^\infty(\mathbb{R})$. $p(t) = -3 \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad P(t) = -3t$. Existencia e Unicidade em todo $\mathbb{R}$.

$$x(t) = e^{3t} \left\{ \int e^{2t} e^{-3t} dt + c \right\} = e^{3t} \left\{ \int e^{-t} dt + c \right\} =$$

$$e^{3t} \left\{ -e^{-t} + c \right\} = e^{2t} + ce^{3t}, \ t \in \mathbb{R}$$

(b) $t\frac{dx}{dt} - 2x = t^5, \quad t > 0,$
Gabarito: Para $t \neq 0$, ie. $t > 0$, resp. $t < 0$, o EDO é equivalente à::

$$\frac{dx}{dt} - \frac{2}{t}x = t^4$$

$q(t) = t^3 \in C^\infty(\mathbb{R})$. $p(t) = -\frac{2}{t} \in C^\infty(\mathbb{R})$:

$$P(t) = \int p(t) dt = \int -\frac{2}{t} dt = -2 \log |t| = -\log t^2$$

Existencia e Unicidade em $t < 0$, resp. $t > 0$.

$$x(t) = e^{\log t^2} \left\{ \int t^4 e^{-\log t^2} dt + c \right\} = t^2 \left\{ \int t^2 \, dt + c \right\} = t^2 \left\{ \frac{1}{3} t^3 + c \right\} = \frac{1}{3} t^5 + ct^2, \ t \neq 0$$

Reparamos, que todas as soluções são definidos também em $t = 0$:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t^5 + c^- t^2, & t < 0 \\ \frac{1}{3}t^5 + c^+ t^2, & t > 0 \end{cases} \qquad x(0^-) = x(0^+): \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

$$x'(t) = \begin{cases} \frac{5}{3}t^4 + 2c^- t, & t < 0 \\ \frac{5}{3}t^4 + 2c^+ t, & t > 0 \end{cases} \qquad x'(0^-) = x'(0^+): \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

Ou seja: toda solução pode ser continuada para qualquer outra, diferencialmente através de $t = 0$; todos passarão para o ponto $(t, x) = (0, 0)$, sendo que infinitias soluções passarão por este elemento de linha, e nenhuma solucão passa por $(0, x), \ x \neq 0$.

(c) $\frac{dx}{dt} + x \tan t = \sin 2t, \quad t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$
Gabarito: $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $q(t) = \sin 2t$, $p(t) = \tan t \in C^\infty(I)$:

$$P(t) = \int \tan t dt = -\log |\cos t| = -\log \cos t, \ t \in I$$

$$x(t) = \cos t \left\{ \int \frac{\sin 2t}{\cos t} dt + c \right\} = \cos t \left\{ 2 \int \sin t \, dt + c \right\} = \cos t \left\{ -2 \cos t + c \right\} = -2 \cos^2 t + c \cos t, \ t \in I$$

Notamos, que tentando continuar soluções do intervalos consegutivos da forma: $I_p =](p-1)\frac{\pi}{2}, p\frac{\pi}{2}[$ e $I_{p+1} =]p\frac{\pi}{2}, (p+1)\frac{\pi}{2}[, p \in \mathbb{Z}$:

$$x(p\frac{\pi}{2}^-) = x(p\frac{\pi}{2}^+) \quad \Leftrightarrow \quad -2 + c^- = -2 + c^+ \quad \Leftrightarrow \quad c^- = c^+$$

Assim todas as soluções maximais em $\mathbb{R}$ são:

$$x(t) = -2 \cos^2 t + c \cos t, \ t \in \mathbb{R}.$$

1.3 Encontrar as soluções maximais das seguintes equações diferenciais

(a) $\frac{dx}{dt} - \frac{\cos t}{1 + \sin t} x = \cos t, \quad t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[;$

(b) $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = -2t^2, \quad t < 0 \vee t > 0;$

(c) $\cos t \frac{dx}{dt} - x \sin t = t \sin t + \cos t, \quad t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[;$

(d) $\frac{dx}{dt}+x\cos t=\sin t\cos t,\quad t\in\mathbb{R}$.

1.4 Encontrar todas as soluções maximais da equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt}+x\cos t=\sin t\cos t,\quad t\in\mathbb{R}$$

Encontrar a solução maximal, $x=\varphi(t)$, cuja: $\varphi(\frac{\pi}{2})=0$.

Gabarito:

$q(t)=\sin t\cos t$, $p(t)=\cos t\in C^\infty(\mathbb{R}$:

$$P(t)=\int\cos t\,dt=\sin t$$

Encontrar todas as soluções maximais da equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt}+x\cos t=\sin t\cos t,\quad t\in\mathbb{R}$$

Encontrar a solução maximal, $x=\varphi(t)$, cuja: $\varphi(\frac{\pi}{2})=0$.

1.5 Seja g uma função diferenciável no intervalo I. Encontre, em termos de g, todas as soluções maximais da equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt}+g'(t)x=g'(t),\quad t\in I$$

Encontrar a solução maximal, $x=\varphi(t)$, cuja: $\varphi(\frac{\pi}{2})=0$.

1.6 Encontre a solução completa da equação diferencial:

$$t(t+1)\frac{dx}{dt}+x=t(t+1)^2e^{-t^2},\quad t\mathbb{R}$$

Mostre que para todos soluções maximais, $\varphi(t)$, a limite $\lim\limits_{t\to-1+}\varphi(t)$ existe. No mais, mostre também que não existe solução maximal cuja a limite $\lim\limits_{t\to0-}\varphi(t)$ existe.

Gabarito: Primeiro, para dizer algo sobre existência e unicidade, precisamos *normalizar* e equação. Para $t\neq0,-1$, a equação é equivalente à:

$$\frac{dx}{dt}+\frac{1}{t(t+1)}x=(t+1)e^{-t^2},\quad t\neq0,-1$$

Mostre que para todos soluções maximais, $\varphi(t)$, a limite $\lim\limits_{t\to-1+}\varphi(t)$ existe. No mais, mostre também que para somente uma solução maximal, a limite $\lim\limits_{t\to0-}\varphi(t)$. Assim, $p(t)=\frac{1}{t(t+1)}$ e $q(t)=(t+1)e^{t^2}$. Temos:

$$\frac{1}{t(t+1)}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}$$

Integrando:

$$P(t)=\int p(t)dt=\int\frac{1}{t(t+1)}dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$
$$\log|t|-\log|t+1|=\log\left|\frac{t}{t+1}\right|$$

Assim:

$$e^{-P(t)}=\left|\frac{t+1}{t}\right|$$

E:

$$\int q(t)e^{P(t)}=(t+1)e^{-t^2}\left|\frac{t}{t+1}\right|$$

Dividimos em dois intervalos, primeiro: $t<-1$:

$$\int q(t)e^{P(t)}=\int-te^{-t^2}=\frac{1}{2}e^{-t^2},$$

a solução completa sendo:

$$x(t)=\frac{t+1}{t}\left[\frac{1}{2}e^{-t^2}+c\right]$$

Para $-1<t<0$ ou $t>0$:

$$\int q(t)e^{P(t)}=\int te^{-t^2}=-\frac{1}{2}e^{-t^2},$$

com solução completa:

$$x(t)=\frac{t+1}{t}\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}+c\right]$$

Assim, podemos escrever a solução:

$$x(t)=\begin{cases}\frac{t+1}{t}\left[\frac{1}{2}e^{-t^2}+c_1\right], & t<-1\\ \frac{t+1}{t}\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}+c_2\right], & -1<t<0\\ \frac{t+1}{t}\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}+c_3\right], & t>0\end{cases}$$

Para qualquer solução maximal:

$$\lim_{t\to -1} x(t)=0,\quad \lim_{t\to 0} x(t)=\infty$$

Assim, nenhuma solução maximal pode ser extendido atraversando $t=0$, porém para extender uma solução através de $t=-1$, precisamos exigir que isso acontece de forma diferenciável, ou seja os seguintes limites deviam existir e serem iguais:

$$\lim_{t\to -1^-} x'(t)=\lim_{t\to -1^+} x'(t)$$

Diferenciamos:

$$\frac{d}{dt}\frac{t+1}{t}\left[\pm\frac{1}{2}e^{-t^2}+c\right]=\pm\frac{1-t}{(1+t)^2}e^{-t^2}+\frac{c}{(1+t)^2}$$

Para nenhuma dessas soluções, existe limite para $t\to -1$.

1.7 Encontre a solução completa das equações diferenciais:

(a) $(t+1)\frac{dx}{dt}+x^2=0,\quad t\neq -1, x\neq 0$

(b) $(t-1)\frac{dx}{dt}=tx,\quad t\neq 1, x\neq 0$

2 Formas Diferenciais

2.1 Existência e Unicidade

Teorema 2 *Equação diferencial normalizada de ordem n:*

$$(*):\frac{d^nx}{dt^n}=F(t,x,\frac{dx}{dt},\ldots,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}),\quad (t,x,p_1,\ldots,p_{n-1})\in\Omega\subset\mathbb{R}^{n+1}$$

Se:

1. *Ω aberta;*
2. *F é contínua em Ω;*
3. *As derivadas parciais da F ao respeito de x, $\frac{dx}{dt},\ldots,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ são contínuas em Ω.*

Então, pelo qualquer emphelemento de linha: $(t_0,x_0,p_1,\ldots,p_{n-1})\in\Omega$, passa uma e somente uma solução máximal para $(*)$, ou seja:

$$x(t_0)=x_0,\quad x'(t_0)=p_1,\quad \ldots\quad x^{(n-1)}(t_0)=p_{n-1}.$$

2.2 Formas Diferenciais

Forma diferencial em $\mathbb{R}^2$:

$$\omega=L(x,y)dx+M(x,y)dy,\quad (x,y)\in\Omega$$

Teorema 3 *Se:*

1. *Ω aberta;*
2. *L, M são $C^1(\Omega)$;*
3. *$(L,M)\neq(0,0)$ para todos $(x,y)\in\Omega$;*

Então, por qualquer ponto, $(x_0,y_0)\in\Omega$, passa uma e somente uma solução maximal para a equação diferencial

$$\omega=L(x,y)dx+M(x,y)dy=0.$$

A forma diferencial, ω, é dito *exata*, se é o diferencial de uma função, F, diferenciável em Ω:

$$\omega=dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$$

Uma condição *necessária*, mas *não* suficiente, para ω ser exata, é::

$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial x}$$

Uma forma diferencial que satisfaz esse equação é dito *fechada*.

Teorema 4 *Uma forma diferencia, $\omega=L(x,y)dx+M(x,y)dy$, em um conjunto aberta e simplesmente conexa[1], é exata, se e somente se, é fechada.*

[1] Um conjunto, A, em $\mathbb{R}^2$ é simplesmente conexa, se todo polígono contido no A, contém o interior desse.

Para cálculamos uma primitiva de uma forma diferencial exata, procede-se:

$$F_1(x,y) = \int L(x,y)dx,$$

Calcule:

$$\omega - dF_1 = f(y)dy,$$

e:

$$F_2(y) = \int f(y)dy$$

Agora:

$$F(x,y) = F_1(x,y) + F)2(y),$$

é uma primitiva do ω. A solução completa da $\omega = 0$, é dado por:

$$F(x,y) = c,$$

onde c é um constante real arbitrária.

2.3 Exercícios:

2.1 Quais formas diferenciais são extatas em $\mathbb{R}^2$:

(a) $2xydx + x^2dy = 0$

(b) $(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy = 0$

(c) $(4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$

(d) $(ye^{-x} - 1)dx + e^{-x}dy = 0, (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

(e) $ydx - (x + y^2)dy, (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

Em cada caso, encontrar os pontos singulares. As equações tem soluções retilíneos?

2.2 Mostre que as formas diferenciais são extatas em $\mathbb{R}^2$ e encontre sua solução completa.:

(a) $(3e^{3x}y - 2x)dx + e^{3x}dy = 0$

(b) $(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0$

(c) $e^{y^2}dx + (2xye^{y^2} - 2y)dy = 0$

(d) $(4y + x^3)dx - xdy, (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

(e) $(x - y^2)dx + 2xydy, (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

2.3 (a) Encontre a solução completa da equação diferencial:

$$(x\sqrt{x^2+y^2} - y)dx + (y\sqrt{x^2+y^2} - x)dy = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Encontre os pontos singulares. Encontre e desenhe a solução máximal contendo o ponto $(0,0)$. *Hint:* Pode-se utilizar coordenados polares.

(b) Encontre a solução completa da equação diferencial:

$$x(1+y^2)dx - y(2y^2 - x^2 + 1)dy = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Encontre o ponto singular. Quantas soluções maximais passa por esse ponto?

2.4 Encontrar os pontos singulares e a solução completa para as equações diferenciais abaixo.

(a) $x^3dx + (y+1)^2dy = 0$;

(b) $(1 + x^3)dx - x^2ydy = 0$;

(c) $x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$.

Em cada caso, investigue a quantia de soluções passando pelos pontos singulares.

2.5 Encontrando um fator integrante da forma $x^\alpha y^\beta$, resolve as equações diferenciais:

(a) $(xy^2 + y) + xdy = 0$;

(b) $(x^2y^3 + 2y)dx + (2x - 2x^3y^2)dy = 0$.

3 Exponencial Complexa

Definição, $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^{x+iy} := e^x(\cos y + i\sin y)$$

Vale, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$
$$(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1z_2}$$

Especificamente, $n \in \mathbb{Z}$:

$$(e^z)^n = e^{nz} = e^{nx}(\cos ny + i\sin ny)$$

Fórmula de Moivre:

$$(\cos y + i\sin y)^n = \cos ny + i\sin ny$$

Coordenados polares, para números complexos, $z = x + iy = (r)_\theta$:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad r \geq 0, -\pi < \theta \leq \pi$$

Vale:

$$(r)_\theta^n = (r)_{n\theta}, \; n \in \mathbb{Z}$$

Equação Binômio de grau $n > 1$:

$$(*): \qquad z^n = c = a + ib = (r)_\theta$$

Os n raízes em $(*)$ são:

$$z = (\sqrt[n]{r})_{\frac{\theta+2p\pi}{n}}, \qquad p = 0, ..., n-1$$

3.1 Exercícios:

3.1 Escreve números complexos de forma polar:

(a) $-4-4i$,
(b) $2\sqrt{3}-6i$,
(c) $-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$,
(d) $3+i\sqrt{3}$,
(e) $\frac{4}{1+i}$,
(f) $\frac{1}{-2+2i\sqrt{3}}$.

3.2 Escreve números complexos de forma $x+iy$:

(a) $(6)_{\frac{3\pi}{2}}$,
(b) $(14)_{15\pi}$,
(c) $(\frac{1}{4})_{-\frac{13\pi}{6}}$,
(d) $(2)_{-\frac{\pi}{8}}$,

3.3 Utilize fórmula de Moivre para encontrar as fórmulas de $\cos 3v$, $\sin 3v$, $\cos 4v$,$\sin 4v$.
Hint! Lembre-se:

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

3.4 Demostre, por exemplo por indução e usando as fórmulas de adição para *cos* e $\sin$, a fórmula de Moivre.

3.5 Resolve as Equações Binômios:

(a) $z^4=2$,
(b) $z^4=-1$,
(c) $z^3=-i$,
(d) $z^3=1-i$,
(e) $(z-1)^3=-1+i$,
(f) $(z+2)^4=8i$.

Em cada caso, indicar os raízes numa figura.

4 Equações Diferenciais Lineares com Coeficientes Constantes.

4.1 A Equação Homogênea.

Para a equação *linear*, homogênea de ordem n com *coeficientes constantes*:

$$(*): \frac{d^nx}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=0 \quad t\in\mathbb{R},$$

Escreva:

$$\widehat{L}x=0,$$

e notamos que a operadora $\widehat{L}$ é *linear*:

$$\begin{array}{ll} I: & \widehat{L}(x+y)=\widehat{L}x+\widehat{L}y \\ II: & \widehat{L}(\alpha x)=\alpha\widehat{L}x \end{array} \tag{1}$$

Procurando soluções da forma $\varphi(t)=ce^{\lambda t}$, temos:

$$\widehat{L}e^{\lambda t}=P(\lambda)e^{\lambda t}, \tag{2}$$

onde $P(\lambda)$ é o *Polinômio Caraterístico*:

$$P(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0, \quad a_i\in\mathbb{R},$$

Equação (2) diz, que $e^{\lambda t}$ é autofunção da operadora $\widehat{L}$ com autovalor $P(\lambda)$. Se $\lambda\in\mathbf{C}$ é raíz em $P(\lambda)$, então as funções:

$$\varphi_\lambda(t)=ce^{\lambda t}, \quad c\in\mathbb{C}, \quad t\in\mathbb{R}$$

são soluções do $(*)$.
Derivando Eq. (2) ao respeito de λ (derivação ao respeito de λ e t comutem):

$$\widehat{L}te^{\lambda t}=P'(\lambda)e^{\lambda t}+P(\lambda)te^{\lambda t}$$

Derivando novamente:

$$\widehat{L}t^2e^{\lambda t}=P''(\lambda)e^{\lambda t}+2P'(\lambda)te^{\lambda t}+P(\lambda)t^2e^{\lambda t}$$

Generalizando:

$$\widehat{L}t^pe^{\lambda t}=\sum_{q=0}^{p}P^{(q)}(\lambda)t^{p-q}e^{\lambda t}, \quad p\geq 1$$

Se λ é um raíz, possivelmente complexa, de multiplicidade $1 \leq \rho \leq n$:

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = \ldots = P^{\rho-1}(\lambda) = 0$$

as ρ funções:

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \cdots, t^{\rho-1}e^{\lambda t}$$

são soluções linearmente independentes da equação homogênea: $\widehat{L}x = 0$. Qualquer combinação linear:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 te^{\lambda t} + \ldots + c_\rho t^{\rho-1} e^{\lambda t}, t \in \mathbb{R}$$

é solução da equação homogênea.
No caso λ complexa, temos que se λ é raíz, então seu complex conjugada, $\overline{\lambda}$ também o é. Denotando: $\lambda = \alpha + i\beta$, a exponencial complexa é definida por:

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t + i \sin\beta t\right)$$

Para um par de raízes complex conjugadas de multiplicidade ρ, as 2ρ funções:

$$e^{\lambda t}, e^{\overline{\lambda} t}, te^{\lambda t}, te^{\overline{\lambda} t}, \cdots, t^{\rho-1}e^{\lambda t}, t^{\rho-1}e^{\overline{\lambda} t}$$

são soluções linearmente independentes da equação homogênea, $(*)$. Temos:

$$c_+ e^{(\alpha+i\beta)t} + c_- e^{(\alpha-i\beta)t} = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\sin\beta t$$

Assim, 2ρ soluções linearmente independentes para a equação homogênea, são:

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, \cdots, t^{\rho-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, t^{\rho-1}e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

e qualquer combinação linear:

$$x(t) = \left(c_1 e^{\alpha t} + c_2 te^{\alpha t} + \ldots + c_\rho t^{\rho-1}e^{\alpha t}\right)\cos\beta t + \left(d_1 e^{\alpha t} + d_2 te^{\alpha t} + \ldots + d_\rho t^{\rho-1}e^{\alpha t}\right)\sin\beta t, \quad t \in \mathbb{R}$$

é solução da equação homogênea. Pelo Teorema Fundamental do Álgebra, os n raízes geram n soluções linearmente independentes da equação homogênea, $(*)$. Através de uma Teorema de Existência e Unicidade, concluímos que estas combinações lineares constituem a soluçaão completa.

4.2 A Equação Inhomogênea.

Consideramos a Equação Inhomogênea[2]:

$$(**) : \widehat{L}x = q(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}.$$

A Solução Completa da Equação Inhomogênea, SCEiH, é dado como a Solução Completa da Equação Homogênea, SCEH, mais ***uma*** Solução Particular da Equação Inhomogênea, SPEiH. Assim, para resolver $(**)$, basta encontramos uma solução particular da mesma. Para esse fim, escreve $q(t)$ como uma soma de funções elementares:

$$q(t) = a_1 q_1(t) + \ldots + a_k q_k(t).$$

E resolve:

$$(*)_k : \widehat{L}x = q_k(t), \quad t \in I.$$

Se $q_k(t) = t_m e^{\lambda t}, \ \ \lambda \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ e λ, não é raíz de ordem $\rho \geq 0$, uma solução particular é da forma ($\rho = 0$ corresponde ao caso λ não ser solução):

$$\varphi_k(t) = (A_0 t^\rho + A_1 t\rho + 1 + \ldots + A_m t^{\rho+m})e^{\lambda t}, \quad A \in \mathbb{R} \ \ (\mathbb{C})$$

A mesma idéia é aplicavel no caso $q_k(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$ (ponhe $\lambda = \alpha + i\beta$ a cima), mas nesse caso precisa-se incluir termos tanto de $\cos$ e $\sin$. Por exemplo, se:

$$q_k(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t,$$

uma solução particular será da forma:

$$\varphi_k(t) = Ae^{\alpha t}\cos\beta t + Be^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Um comentário similar vale para o caso $q_k(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$. Em ambos os casos, a utilização da exponencial compleza é vantajosa. No caso:

$$q_k(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t = Re\left(e^{(\alpha+i\beta)t}\right)$$

considere a equação diferencial complexa:

$$\widehat{L}z_k = e^{(\alpha+i\beta)t},$$

e resolve esta usando os resultados a cima. Terminado, a solução particular da equação original, é: $\varphi_k = Re\,(Z_k)$. Similarmente, para:

$$q_k(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t = Im\left(e^{(\alpha+i\beta)t}\right)$$

considere novamente:

$$\widehat{L}z_k = e^{(\alpha+i\beta)t}.$$

Resolvida, a solução particular da equação original, é: $\varphi_k = Im\,(Z_k)$.

[2] Não homogênea

4.3 Exercícios:

4.1 Encontrar a solução completa das equações diferenciais:

(a) $\dfrac{d^3x}{dt^3} - \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} - x = 0$

Gabarito:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = \lambda^2(\lambda-1) + (\lambda-1) = (\lambda^2+1)(\lambda-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 = \pm i \vee \lambda = 1$$

Solução completa:

$$x(t) = c_1e^t + c_2'e^{it} + c_3'e^{-it} = \underline{\underline{c_1e^t + c_2\cos t + c_3\sin t,\ t \in \mathbb{R},}}$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ $(c_2', c_3' \in \mathbb{C})$.

(b) $\dfrac{d^3x}{dt^3} - 3\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} - x = 0$

Gabarito:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda-1)^3 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1$$

Raíz tripla, solução completa:

$$\underline{\underline{x(t) = (c_1 + c_2t + c_3t^2)e^t,\ t \in \mathbb{R}}}$$

(c) $\dfrac{d^4x}{dt^4} + 2\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 0$

Gabarito:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm i$$

Ambos raízes duplas, solução completa:

$$x(t) = (c_1' + c_2't)e^{it} + (c_3' + c_4't)e^{-it} = \underline{\underline{(c_1 + c_2t)\cos t + (c_3 + c_4t)\sin t,\ t \in \mathbb{R}}}$$

(d) $\dfrac{d^4x}{dt^4} + x = 0$

Gabarito:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^4 = -1 = (1)_\pi$$

Raízes n-ésimos, $p = 0, 1, 2, 3$:

$$\lambda_p = (1)_{\frac{\pi}{4} + p\pi/2} = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$$

Raízes simples, solução completa:

$$x(t) = c_1'e^{(1+i)t} + c_2'e^{(1-i)t} + c_3'e^{(-1+i)t} + c_4'e^{(-1-i)t} = \underline{\underline{c_1e^t\cos t + c_2e^t\sin t + c_3e^{-t}\cos t + c_4'e^{-t}\sin t,\ t \in \mathbb{R}}}$$

(e) $\dfrac{d^4x}{dt^4} + 6\dfrac{d^3x}{dt^3} + 5\dfrac{d^2x}{dt^2} - 24\dfrac{dx}{dt} - 36x = 0$

Gabarito:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 5\lambda^2 - 24\lambda - 36 = 0$$

$\lambda = -2$ raíz:

$$\lambda^4 + 6\lambda^3 + 5\lambda^2 - 24\lambda - 36 = (\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 18)(\lambda+2)$$

$\lambda = -3$ raíz:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 18 = (\lambda^2 + \lambda - 6)(\lambda+3)$$

Raízes 2 e -3:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda+3)(\lambda-2)$$

Juntando:

$$P(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-2) = (\lambda^2-4)(\lambda+3)^2$$

Duas raízes simples e uma dupla, solução completa:

$$\underline{\underline{x(t) = (c_1 + c_2t)e^{-3t} + c_3e^{2t} + c_4e^{-2t},\ t \in \mathbb{R}}}$$

(f) $\dfrac{d^6x}{dt^6} + 9\dfrac{d^4x}{dt^4} + 24\dfrac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$

Gabarito:

$$P(\lambda) = \lambda^6 + 9\lambda^4 + 24\lambda^2 + 16$$

$z = \lambda^2$:

$$z^3 + 9z^2 + 24z + 16$$

$z = 1$ é raíz:

$$z^3 + 9z^2 + 24z + 16 = (z^2 + 8z + 16)(z+1) = (z+4)^2(z+1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$z = -4 \vee z = -1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\lambda^2 = -4 \vee \lambda^2 = -1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\lambda = \pm 2i \vee \lambda = \pm i$$

As primeiras duas raízes são duplas e as últimas simples, solução completa:

$$x(t) = (c_1' + c_2't)e^{2it} + (c_3' + c_4't)e^{-2it} + c_5'e^{it} + c_6'e^{it} =$$

$$\underline{\underline{(c_1 + c_2t)\cos 2t + (c_3 + c_4t)\sin 2t + c_5\cos t + c_6\sin t,\ t \in \mathbb{R}}}$$

4.2 Encontrar (i) a solução completa das equações diferenciais e (ii) a solução maximal passando pelos elementos de linha indicados:

(a) $\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0, \quad (t_0, x_0, p_1, p_2) = (0, -3, -3, 3)$

(b) $\frac{d^3x}{dt^3} + 4\frac{dx}{dt} = 0, \quad (t_0, x_0, p_1, p_2) = (\pi, 2, -2, 4)$

(c) $\frac{d^4x}{dt^4} - 6\frac{d^3x}{dt^3} + 12\frac{d^2x}{dt^2} - 8\frac{dx}{dt} = 0 \quad (t_0, x_0, p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 0, -2, -4)$

4.3 Encontrar a solução completa das equações diferenciais:

(a) $\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = e^t, \quad t \in \mathbb{R}$

Gabarito:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -1$$

Solução completa da equação homogêna:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^{-t}, \; t \in \mathbb{R}$$

Ja que $\lambda = 1$ *não* é raíz, solução parcial da forma:

$$x(t) = Ae^t$$

Inserido:

$$\widehat{L}Ae^t = P(1)Ae^t = 8Ae^t := e^t \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{8}$$

Solução completa da equação inhomogêna:

$$\underline{\underline{x(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^{-t} + \frac{1}{8}e^t, \; t \in \mathbb{R}}}$$

(b) $\frac{d^4x}{dt^4} + 16x = t^4, \quad t \in \mathbb{R}$

Gabarito:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^4 = -16 = (16)_\pi$$

Raízes n-ésimas, $p = 0, 1, 2, 3$:

$$\lambda_p = (\sqrt[4]{16})_{\frac{\pi}{4} + p\frac{\pi}{2}} = (2)_{\frac{\pi}{4} + p\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}(\pm 1 \pm i)$$

Solução completa da equação homogêna:

$$x(t) = c_1' e^{\sqrt{2}(1+i)t} + c_2' e^{\sqrt{2}(1-i)t} + c_3' e^{\sqrt{2}(-1+i)t} + c_4' e^{\sqrt{2}(-1-i)t} =$$
$$e^{\sqrt{2}t}\left(c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \sin\sqrt{2}t\right) + e^{\sqrt{2}t}\left(c_3 \cos\sqrt{2}t + c_4 \sin\sqrt{2}t\right), \; t \in \mathbb{R}$$

Ja que $\lambda = 0$ *não* é raíz, solução parcial da forma:

$$\varphi(t) = At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E$$

$$\widehat{L}\,1 = P(0) = 16$$

Notamos: $P(0) = 16$ e $P'(0) = P''(0) = P'''(0) = 0$ e $P''''(0) = 24$:

$$\widehat{L}t = P'(0) + tP(0) = 16t$$

$$\widehat{L}t^2 = P''(0) + 2tP'(0) + t^2P(0) = 16t^2$$
$$\widehat{L}t^3 = P'''(0) + 3tP''(0) + 3t^2P'(0) + t^3P(0) = 16t^3$$
$$\widehat{L}t^4 = P''''(0) + 4tP'''(0) + 6t^2P''(0) + 3t^3P'(0) + t^4P(0) = 24 + 16t^4$$

Juntando:

$$\widehat{L}\varphi(t) = A(24 + 16t^4) + 16Bt^3 + 16Ct + 16Dt + 16E = t^4 \quad \Leftrightarrow$$
$$16A = 1 \wedge B = C = D = 0 \wedge 16A + 24E = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$A = \frac{1}{16} \wedge B = C = D = 0 \wedge E = -\frac{1}{24}$$

Ou seja:

$$\varphi(t) = \frac{1}{16}t^4 - \frac{1}{24}$$

Solução completa da equação inhomogêna:

$$\underline{\underline{x(t) = e^{\sqrt{2}t}\left(c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \sin\sqrt{2}t\right) + e^{\sqrt{2}t}\left(c_3 \cos\sqrt{2}t + c_4 \sin\sqrt{2}t\right) + \frac{1}{16}t^4 - \frac{1}{24}, \; t \in \mathbb{R}}}$$

(c) $\frac{d^5x}{dt^5} + 4\frac{d^4x}{dt^4} = e^t + 3\sin 2t + t, \quad t \in \mathbb{R}$

Gabarito:

$$P(\lambda) = \lambda^5 + 4\lambda^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -4 \vee \lambda = 0$$

Uma raíz simples e uma de ordem 4, solução completa da equação homogêna:

$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 + c_3 t + c_4 t^2 + c_5 t^3, \; t \in \mathbb{R}$$

Escrevemos o lado direito:

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t)$$

i. $q_1(t) = e^t$: $\lambda = 1$ *não* é solução, então:

$$\varphi_1(t) = Ae^t$$

$$\widehat{L}\, Ae^t = AP(1)e^t = 5Ae^t := e^t \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{5}$$

Então:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{5}e^t$$

ii. $q_2(t) = 3\sin 2t = \mathrm{Im}(3e^{2it})$:

$$z_1(t) = Ae^{2it}$$

$$\widehat{L}\, Ae^{2it} = AP(2i)e^{2it} = A\left((2i)^5 + 4\cdot(2i)^4\right)e^{2it} = 32A\,(2+i)\,e^{2it} := 3e^{2it} \quad \Leftrightarrow$$

$$A = \frac{3}{32(2+i)} = \frac{3}{160}(2-i)$$

$$z_2(t) = \frac{3}{160}(2-i)e^{2it}$$

$$\varphi_2(t) = \mathrm{Im}\, z_2(t) = \frac{3}{160}(2-i)\,\mathrm{Im}\,(\cos 2t + i\sin 2t) =$$

$$\frac{3}{160}\,(2\sin 2t - \cos 2t)$$

iii. $q_3(t) = t$. Já que 1, t, t^2 e t^3 são soluções da inhomogênia, adivinhamos:

$$\varphi_3(t) = At^5 + Bt^4$$

Nota-se: $P(0) = P'(0) = P''(0) = P'''(0)$, $P''''(0) = 4\cdot 4! = 96$ e $P'''''(0) = 5! = 120$:

$$\widehat{L}t^4 = P''''(0) = 96$$

$$\widehat{L}t^4 = P''''(0) = 96 = 120 + 96t$$

$$\widehat{L}t^5 = P'''''(0) + 5P''''(0)t = 120 + 96t$$

$$\widehat{L}\varphi_3(t) = A(120+96t) + 96B = 96At + 120A + 96B := t \quad \Leftrightarrow$$

$$96A = 1 \wedge 96B = -120A \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{96} \wedge B = -\frac{120}{96} = -\frac{5}{4}$$

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{96}t^4(t-5)$$

Solução completa da equação inhomogêna:

$$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2 + c_3t + c_4t^2 + c_5t^3 + \frac{1}{5}e^t + \frac{3}{160}\,(2\sin 2t - \cos 2t) + \frac{1}{96}t^4(t-5),\ t\in\mathbb{R}$$

(d) $\dfrac{d^3x}{dt^3} - 5\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} = -10e^{-t}, \quad t\in\mathbb{R}$

Gabarito:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-4) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 0 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = 4$$

Solução completa da equação homogêna:

$$x(t) = c_1 + c_2e^t + c_3e^{4t},\ t\in\mathbb{R}$$

Ja que $\lambda = -1$ *não* é raíz, solução parcial da forma:

$$x(t) = Ae^{-t}$$

Inserido:

$$\widehat{L}Ae^{-t} = P(-1)Ae^{t-} = -4Ae^{-t} := e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad A = -\frac{1}{4}$$

$$\varphi(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}$$

Solução completa da equação inhomogêna:

$$x(t) = c_1 + c_2e^t + c_3e^{4t} - \frac{1}{4}e^{-t},\ t\in\mathbb{R}$$

(e) $\dfrac{d^3x}{dt^3} - \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} = e^t, \quad t\in\mathbb{R}$

Gabarito:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = \lambda(\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 0 \vee \lambda = -1 \vee \lambda = 2$$

Solução completa da equação homogêna:

$$x(t) = c_1 + c_2e^{-t} + c_3e^{2t},\ t\in\mathbb{R}$$

Ja que $\lambda = 1$ *não* é raíz, solução parcial da forma:

$$x(t) = Ae^t$$

Inserido:

$$\widehat{L}Ae^t = P(1)Ae^t = -2Ae^t := e^t \quad \Leftrightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$$

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2}e^t$$

Solução completa da equação inhomogêna:

$$x(t) = c_1 + c_2e^{-t} + c_3e^{2t} - \frac{1}{2}e^t,\ t\in\mathbb{R}$$

4.4 Encontrar a solução completa da equação diferencial:

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 5\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} - 4x = e^{2t}$$

4.5 Encontrar a solução completa das equações diferenciais:

(a) $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = e^t, \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = t^3, \quad t \in \mathbb{R}$

(c) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 5x = \cos t, \quad t \in \mathbb{R}$

(d) $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 2t^2 + 3, \quad t \in \mathbb{R}$

(e) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = -5\sin t, \quad t \in \mathbb{R}$

(f) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = e^{2t} + t, \quad t \in \mathbb{R}$

(g) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4x = 3e^t + 2\sin t, \quad t \in \mathbb{R}$

(h) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 8x = 2e^{2t}\cos 2t + \cos t, \quad t \in \mathbb{R}$

(i) $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 3\cos\frac{t}{2} + 2t^2 + 3, \quad t \in \mathbb{R}$

Encontrar a solução completa das equações diferenciais:

4.6 (a) $\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(c) $\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(d) $\frac{d^4x}{dt^4} + x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(e) $\frac{d^4x}{dt^4} + 6\frac{d^3x}{dt^3} + 5\frac{d^2x}{dt^2} - 24\frac{dx}{dt} - 36x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(f) $\frac{d^6x}{dt^6} + 9\frac{d^4x}{dt^4} + 24\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(g) $\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(h) $\frac{d^3x}{dt^3} + 4\frac{dx}{dt} = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

(i) $\frac{d^4x}{dt^4} - 6\frac{d^3x}{dt^3} + 12\frac{d^2x}{dt^2} - 8\frac{dx}{dt} = 0, \quad t \in \mathbb{R}$

5 Método de Coeficientes Indeterminados

Considerando um EDO *linear* e *normalizado*, de ordem dois:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p_1(t)\frac{dx}{dt} + p_0(t)x = q(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R},$$

e dado que $\varphi_1(t)$ é solução da equação homogênea, então (no intervalo I)

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t)\int \frac{1}{\varphi_1(t)^2}e^{-P_1(t)}dt = \varphi_1(t)I(t),$$

também é. Aqui, como acostumadamente: $P_1(t) = \int p_1 dt$. No mais, uma solução *particular* da equação inhomogênea é dado por:

$$\varphi_0(t) = \varphi_2(t)\int \frac{\varphi_1(t)q(t)}{W(t)}dt - \varphi_1(t)\int \frac{\varphi_2(t)q(t)}{W(t)}dt =$$

$$\varphi_2(t)I_1(t) - \varphi_1(t)I_2(t) = \begin{vmatrix} I_1(t) & I_2(t) \\ \varphi_1(t) & \varphi_2() \end{vmatrix}, \quad t \in I.$$

Nota-se, que o cálculo do $W(t)$ pode ser simplificado considerávelmente:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_1(t)I(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_1'(t)I(t) + \varphi_1(t)I'(t) \end{vmatrix} = \varphi_1(t)\cdot\varphi_1(t)I'(t)$$

Pela definição do integral $I(t)$:

$$I'(t) = \frac{1}{\varphi_1(t)^2}e^{-P(t)}$$

Então:

$$W(t) = \varphi_1(t)^2\frac{1}{\varphi_1(t)^2}e^{-P(t)} = e^{-P(t)}$$

5.1 Exercícios:

5.1 Para as Equações Diferencias abaixo, demostre que $\varphi_1(t)$ é solução, encontre a solução completa:

(a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - (1 + 2\tan^2 t)x = 0, \quad t \in] - \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[, \qquad \varphi_1(t) = \dfrac{1}{\cos t}$

Gabarito:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\cos t} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_1'(t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t} \qquad \Rightarrow$$

$$\varphi_1''(t) = \frac{\cos t}{\cos^2 t} + \sin t \frac{2\sin t}{\cos^3 t} = \frac{\cos^2 t + 2\sin^2 t}{\cos^3 t} = \left(1 + 2\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)\frac{1}{\cos t} = (1 + 2\tan^2 t)\varphi_1(t)$$

Ou seja, $\varphi_1(t)$ é solução da equação homogênea. Calculando:

$$p_1(t) = 0 \qquad \Rightarrow P_1(t) = 0,$$

e:

$$I_0(t) = \int \frac{e^{-P_1(t)}}{\varphi_1(t)^2} dt = \int 1 \cdot \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2t) dt \sim$$

$$t + \frac{1}{2}\sin 2t = t + \sin t \cos t$$

Finalmente:

$$\varphi_2(t) = \varphi_2(t) I_0(t) = \frac{t}{\cos t} + \sin t$$

Solução completa da equação homogênea:

$$x(t) = \frac{c_1 + c_2 t}{\cos t} + c_2 \sin t$$

(b) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\tan t\dfrac{dx}{dt} + 3x = 0, \quad t \in] - \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[, \qquad \varphi_1(t) = \sin t$

Gabarito: Derivando:

$$\varphi_1(t) = \sin t \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_1'(t) = \cos t \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_1''(t) = -\sin t$$

Inserindo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\tan t\frac{dx}{dt} + 3x = -\sin t - 2\tan t \cos t + 3\sin t = 0$$

Isto é, $\varphi_1(t) = \sin t$ é solução da equação homogênea. Calculamos a outra solução:

$$P_1(t) = -2\int \tan t dt = -2\int \frac{\sin t}{\cos t} dt = \int \frac{2}{u} du\Big|_{u=\cos t} = 2\log u|_{u=\cos t} = 2\log\cos t$$

Assim:

$$e^{-\int p_1(t)dt} = e^{-2\log\cos t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

E, inicialmente para $t \neq 0$:

$$\int \frac{e^{-\int p_1(t)dt}}{\varphi_1(t)^2} dt = \int \frac{1}{\cos^2 t \sin^2 t} dt =$$

$$\int \frac{4}{\sin^2 2t} dt = \int \frac{2}{\sin^2 u} du\Big|_{u=2t}$$

Temos:

$$\frac{d}{du}\cot u = -\frac{1}{\sin^2 u}$$

$$\int \frac{4}{\sin^2 2t} dt = -2\cot 2t = -2\frac{\cos 2t}{\sin 2t} = 2\frac{\sin^t t - \cos^2 t}{2\sin t\cos t} = \tan t - \cot t$$

Finalmente:

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t)\int \frac{e^{-\int p_1(t)dt}}{\varphi_1(t)^2} dt = \sin t\,(\tan t - \cot t)$$

Notamos, que $\varphi_2(t)$ pode ser extendida para ser extendida para $t = 0$ também, já que:

$$\lim_{t\to 0} \sin t\,(\tan t - \cot t) = 0 \cdot 0 - \lim_{t\to 0} \sin t \cot t = -\lim_{t\to 0} \cos t = -1$$

Solução completa da equação homogênea:

$$x(t) = c_1 \sin t + c_2 \sin t\,(\tan t - \cot t)\,, \qquad |t| < \frac{\pi}{2}$$

(c) $t\dfrac{d^2x}{dt^2} - (2t + 1)\dfrac{dx}{dt} + (t + 1)x = 0, \quad t > 0, \qquad \varphi_1(t) = e^t$

5.2 Para as Equações Diferencias abaixo, demonstre que $\varphi_1(t)$ é solução, encontre todas as soluções maximais:

(a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - \tanh t \dfrac{dx}{dt} - (1-\tanh^2 t)x = e^t, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_1(t) = \cosh t$

Gabarito:

$$P_1(t) = \int p_1(t)\,dt = \int -\tanh(t)\,dt = \underline{\underline{-\log\cosh t}}$$

$$I(t) = \int \frac{1}{\varphi_1(t)^2} e^{-P_1(t)} dt = \int \frac{1}{\cosh^2 t} e^{\log\cosh t} dt = \int \frac{1}{\cosh t} dt =$$

$$\int \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt = 2 \int \frac{e^t}{e^{2t}+1} dt = 2 \int \frac{1}{u^2+1} du \Big|_{u=e^t} = \underline{\underline{2\,\mathrm{Arctan}\, e^t}}$$

$$\cancel{2}\varphi_2(t) = \cancel{2}\varphi_1(t) I(t) = \cancel{2}\underline{\underline{\cosh t\,\mathrm{Arctan}\, e^t}}$$

Solução Completa da Equação Homogênea, SCEH:

$$x(t) = \cosh t \left\{ c_1 + c_2\,\mathrm{Arctan}\, e^t \right\},\ t \in \mathbb{R}$$

Derivadas:

$$\varphi_1(t) = \cosh t \quad \Rightarrow \quad \varphi_1'(t) = \sinh t$$

$$\varphi_2(t) = \cosh t\,\mathrm{Arctan}\, e^t \quad \Rightarrow \quad \varphi_2'(t) = \sinh t\,\mathrm{Arctan}\, e^t + \cosh t \frac{e^t}{1+e^{2t}}$$

Wronsky:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \cosh t \left\{ \cancel{\sinh t\,\mathrm{Arctan}\, e^t} + \cosh t \frac{e^t}{1+e^{2t}} \right\} - \cancel{\sinh t \cosh t\,\mathrm{Arctan}\, e^t} =$$

$$\cosh^2 t \frac{e^t}{1+e^{2t}} = \cosh^2 t \cdot \frac{1}{2\cosh t} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\cosh t}} > 0$$

Ie: φ_1, φ_2 linearmente independentes.

$$I_1(t) = \int \frac{\varphi_1(t) q(t)}{W(t)} dt = \int \frac{\cancel{\cosh t} e^t}{\frac{1}{2}\cancel{\cosh t}} dt = \int 2e^t\,dt = \underline{\underline{2e^t}}$$

$$I_2(t) = \int \frac{\varphi_2(t) q(t)}{W(t)} dt = \int \frac{e^t \cancel{\cosh t}\,\mathrm{Arctan}\, e^t}{\frac{1}{2}\cancel{\cosh t}} dt = 2 \int e^t\,\mathrm{Arctan}\, e^t dt =$$

$$2 \int \mathrm{Arctan}\, u\,du \Big|_{u=e^t} = 2u\,\mathrm{Arctan}\, u - 2 \int u \cdot \frac{1}{1+u^2} du \Big|_{u=e^t} =$$

$$\underline{\underline{2e^t\,\mathrm{Arctan}\, e^t - \log\left(1+e^{2t}\right)}}$$

$$\varphi_0(t) = \varphi_2(t) I_1(t) - \varphi_1(t) I_2(t) =$$

$$\cancel{2e^t \cosh t\,\mathrm{Arctan}\, e^t} - \cosh t \left\{ \cancel{2e^t\,\mathrm{Arctan}\, e^t} - \log\left(1+e^{2t}\right) \right\} =$$

$$\underline{\underline{\cosh t \log\left(1+e^{2t}\right)}}$$

Solução Completa da Equação Inhomogênea, SCEiH:

$$x(t) = \cosh t \left\{ c_1 + c_2\,\mathrm{Arctan}\, e^t + \log\left(1+e^{2t}\right) \right\},\ t \in \mathbb{R}$$

(b) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\tan t \dfrac{dx}{dt} + 3x = 3\tan t, \quad t \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[, \qquad \varphi_1(t) = \sin t$

Gabarito:

$$P_1(t) = \int p_1(t) dt = \int -2\tan t dt = 2\log\cos t = \underline{\underline{\log\cos^2 t}}$$

$$I(t) = \int \frac{1}{\varphi_1(t)^2} e^{-P_1(t)} dt = \int \frac{1}{\sin^2 t \cos^2 t} dt = \int \frac{4}{\sin^2 2t} dt = \int \frac{2}{\sin^2 u} du \Big|_{u=2t}$$

Observe:

$$\frac{d\cot t}{dt} = -1 - \cot^2 t = -\frac{1}{\sin^2 t} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{\sin^2 t} dt = -\cot t$$

$$I(t) = \underline{\underline{-2\cot 2t}}$$

$$\cancel{-2}\varphi_2(t) = \cancel{-2}\varphi_1(t) I(t) = \cancel{-2}\underline{\underline{\sin t \cot 2t}}$$

Solução Completa da Equação Homogênea, SCEH:

$$x(t) = \sin t \left\{ c_1 + c_2 \cot 2t \right\},\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

Derivadas:

$$\varphi_1(t) = \sin t \quad \Rightarrow \quad \varphi_1'(t) = \cos t$$

$$\varphi_2(t) = \sin t \cot 2t \quad \Rightarrow \quad \varphi_2'(t) = \cos t \cot 2t - 2\sin t \frac{1}{\sin^2 2t} = \cos t \cot 2t - \frac{1}{2}\cancel{\sin t}\frac{1}{\sin^{\cancel{2}} t \cos^2 t}$$

Wronsky:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \sin t \left\{ \cancel{\cos t \cot 2t} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sin t \cos^2 t} \right\} - \cancel{\sin t \cos t \cot 2t} =$$

$$\underline{\underline{-\frac{1}{2\cos^2 t}}} \neq 0,\ t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$

Ie: φ_1, φ_2 linearmente independentes.

$$I_1(t) = \int \frac{\varphi_1(t)q(t)}{W(t)}dt = -6\int \frac{\sin t \tan t}{\frac{1}{\cos^2 t}}dt = -6\int \sin t \frac{\sin t}{\cos t}\cos^2 t dt$$

$$= -6\int \sin^2 t \cos t dt = -6\int u^2 du\Big|_{u=\sin t} = \underline{\underline{-2\sin^3 t}}$$

$$I_2(t) = \int \frac{\varphi_2(t)q(t)}{W(t)}dt = \int \frac{\sin t \cot 2t \cdot 3\tan t}{\frac{-1}{2\cos^2 t}} = -6\int \sin t \cot 2t \tan t \cos^2 t\, dt =$$

$$-6\int \sin^2 t \cot 2t \cos t\, dt =$$

$$-6\int \sin^2 t \frac{\cos 2t}{2\sin t \cos t}\cos t\, dt = -3\int \sin t \cos 2t\, dt =$$

$$-3\int (2\cos^2 t - 1)\sin t\, dt = 3\int (2u^2-1)du\Big|_{u=\cos t} =$$

$$3\left\{\frac{2}{3}\cos^3 t - \cos t\right\} = \underline{\underline{2\cos^3 t - 3\cos t}}$$

$$\varphi_0(t) = \varphi_2(t)I_1(t) - \varphi_1(t)I_2(t) = \sin t \cot 2t(-2\sin^3 t) - \sin t(2\cos^3 t - 3\cos t) =$$

$$\sin t\left\{-2\cot 2t \sin^3 t - 2\cos^3 t + 3\cos t\right\} = -\sin t\left\{2\frac{\cos 2t}{2\sin t\cos t}\sin^3 t + 2\cos^3 t - 3\cos t\right\} =$$

$$-\sin t\left\{\frac{\cos 2t \sin^2 t + 2\cos^4 t}{\cos t} - 3\cos t\right\} = -\sin t\left\{\frac{(2\cos^2 t - 1)(1-\cos^2 t) + 2\cos^4 t}{\cos t} - 3\cos t\right\} =$$

$$-\sin t\left\{\frac{3\cos^2 t - 1}{\cos t} - 3\cos t\right\} = -\sin t\left\{\frac{3\cos^2 t - 1 - 3\cos^2 t}{\cos t}\right\} = \sin t \cdot \frac{1}{\cos t} =$$

$$\underline{\underline{\tan t}}$$

Solução Completa da Equação Inhomogênea, SCEiH:

$$x(t) = \sin t\left\{c_1 + c_2\cot 2t\right\} + \tan t,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

(c) $t^2\dfrac{d^2x}{dt^2} + t\dfrac{dx}{dt} + (t^2 - \dfrac{1}{4})x = t\sqrt{t}, \quad t > 0, \qquad \varphi_1(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\cos t$

Gabarito: Para $t > 0$ a equação é equivalente à:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dx}{dt} + \left(1 - \frac{1}{4t^2}\right)x = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$P_1(t) = \int p_1(t)dt = \int \frac{1}{t}dt = \underline{\underline{\log t}}$$

$$I(t) = \int \frac{1}{\varphi_1(t)^2}e^{-P_1(t)}dt = \int \frac{t}{\cos^2 t}e^{-\log t}dt = \int \frac{1}{\cos^2 t}dt = \underline{\underline{\tan t}}$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t)I(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\cos t \tan t = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{t}}\sin t}}$$

Solução Completa da Equação Homogênea, SCEH:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left\{c_1\cos t + c_2\sin t\right\},\ t > 0$$

Derivadas:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\cos t \quad \Rightarrow \quad \varphi_1'(t) = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{t}}\sin t$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\sin t \quad \Rightarrow \quad \varphi_2'(t) = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}\sin t + \frac{1}{\sqrt{t}}\cos t$$

Wronsky:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\cdot\left\{\cancel{-\frac{1}{2t\sqrt{t}}\sin t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\cos t\right\} - \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\cdot\left\{\cancel{-\frac{1}{2t\sqrt{t}}\cos t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\sin t\right\} =$$

$$\frac{\cos^2 t}{t} + \frac{\sin^2 t}{t} = \underline{\underline{\frac{1}{t}}} > 0$$

Ie: φ_1, φ_2 linearmente independentes.

$$I_1(t) = \int \frac{\varphi_1(t)q(t)}{W(t)}dt = \int \frac{\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}}{\frac{1}{t}}dt \int \cos t\, dt = \underline{\underline{\sin t}}$$

$$I_2(t) = \int \frac{\varphi_2(t)q(t)}{W(t)}dt = \int \frac{\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}}{\frac{1}{t}}dt \int \sin t\, dt = \underline{\underline{-\cos t}}$$

$$\varphi_0(t) = \varphi_2(t)I_1(t) - \varphi_1(t)I_2(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\sin t + \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\cos t = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sqrt{t}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{t}}}}$$

Solução Completa da Equação Inhomogênea, SCEiH:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left\{c_1\cos t + c_2\sin t + 1\right\},\ t > 0$$

(d) $t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}-2t\dfrac{dx}{dt}-(t^2-2)x=t^3,\quad t\in\mathbb{R},\qquad \varphi_1(t)=t\cosh t$

Gabarito: Para $t\neq 0$ a equação equivale:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{2}{t}\frac{dx}{dt}-(1-\frac{2}{t^2})x=t$$

Temos Existência e Unicidade para $t<0$, respectivamente $t>0$.

$$P_1(t)=\int p_1(t)d=\int -\frac{2}{t}dt=-2\log|t|=\underline{\underline{-\log t^2}}$$

$\varphi_1(t)=t\cosh t$:

$$\varphi_2(t)=\varphi_1(t)\int\frac{1}{\varphi_1(t)^2}e^{-P(t)}dt=t\cosh t\int\frac{1}{t^2\cosh^2 t}e^{\log t^2}=$$

$$t\cosh t\int\frac{1}{\cosh^2 t}dt=t\cosh t\tanh t=\underline{\underline{t\sinh t}}$$

SCEH:

$$x(t)=t\left(c_1\cosh t+c_2\sinh t\right),\ t\neq 0$$

$$W(t)=\begin{vmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t)\\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t\cosh t & t\sinh t\\ \cancel{\cosh t}+t\sinh t & \cancel{\sinh t}+t\cosh t\end{vmatrix}=$$

$$t^2\cosh^2 t-t^2\sinh^2 t=\underline{\underline{t^2}}$$

$$I_1(t)=\int\frac{\varphi_1(t)q(t)}{W(t)}dt=\int\frac{t\cosh t\cdot t}{t^2}dt=\int\cosh t\,dt=\underline{\underline{\sinh t}}$$

$$I_2(t)=\int\frac{\varphi_2(t)q(t)}{W(t)}dt=\int\frac{t\sinh t\cdot t}{t^2}dt=\int\sinh t\,dt=\underline{\underline{\cosh t}}$$

$$\varphi_0(t)=\varphi_2(t)I_1(t)-\varphi_1(t)I_2(t)=t\sinh t\cdot\sinh t-\cosh t\cdot t\cosh t=\underline{\underline{-t}}$$

SCEiH:

$$x(t)=t\left(c_1\cosh t+c_2\sinh t-1\right),\ t\neq 0$$

Nota-se:

$$x'(t)=c_1\cosh t+c_2\sinh t-1+t\left(c_1\sinh t+c_2\cosh t\right)$$
$$x''(t)=2c_1\sinh t+2c_2\cosh t+t\left(c_1\cosh t+c_2\sinh t\right)$$

Tentando extender soluções definidas para $t<0$, respectivamente $t>0$:

$$x(t)=\begin{cases}t\left(c_1^-\cosh t+c_2^-\sinh t-1\right), & t<0\\ t\left(c_1^+\cosh t+c_2^+\sinh t-1\right), & t>0\end{cases}$$

$$x(0^-)=x(0^+)\quad\Leftrightarrow\quad 0=0$$
$$x'(0^-)=x'(0^+)\quad\Leftrightarrow\quad c_1^-=c_1^+:=c_1$$
$$x''(0^-)=x''(0^+)\quad\Leftrightarrow\quad c_2^-=c_2^+:=c_2$$

Assim, todas as soluções maximais definidas em toda $\mathbb{R}$, são:

$$x(t)=t\left(c_1\cosh t+c_2\sinh t-1\right),\ t\in\mathbb{R}$$

(e) $(1-t^2)\dfrac{d^2x}{dt^2}-t\dfrac{dx}{dt}+x=t,\quad -1<t<1,\qquad \varphi_1(t)=t$

Gabarito: Para $|t|<1$:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{t}{1-t^2}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{1-t^2}x=\frac{t}{1-t^2}$$

$$P_1(t)=\int p_1(t)dt=-\int\frac{t}{1-t^2}dt=\underline{\underline{\frac{1}{2}\log\left(1-t^2\right)}}$$

$$I(t)=\int\frac{1}{\varphi_1(t)^2}e^{-P_1(t)}dt=\int\frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{2}\log\left(1-t^2\right)}dt$$

Substituimos: $t=\sin u$, $dt=\cos u\,du$:

$$I(t)=\int\frac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt=\int\frac{\cos u}{\sin^2 u\cos u}du=\int\frac{1}{\sin^2 u}du=$$

$$-\cot u=-\frac{\cos u}{\sin u}=\underline{\underline{-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}}}$$

$$\varphi_2(t)=\varphi_1(t)I(t)=-t\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}=\cancel{-}\underline{\underline{\sqrt{1-t^2}}}$$

Solução Completa da Equação Homogênea, SCEH:

$$x(t)=c_1t+c_2\sqrt{1-t^2},\ |t|<1$$

Wronsky:

$$W(t)=\begin{vmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t)\\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t & \sqrt{1-t^2}\\ 1 & -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\end{vmatrix}=-\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}-\sqrt{1-t^2}=$$

$$-\frac{t^2+1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Ie: φ_1, φ_2 linearmente independentes.

$$I_1(t) = \int \frac{\varphi_1(t)q(t)}{W(t)} dt = \int \frac{t\frac{t}{1-t^2}}{-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}} dt = -\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Com a mesma substituição:

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{\sin^2 u}{\cos u} \cos u \, du = \int \sin^2 u \, du =$$

$$\frac{1}{2}\int (1 - cos2u)\, du = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{2}\sin 2u\right) = \frac{1}{2}(u - \sin u \cos u) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(\operatorname{Arcsin} t - t\sqrt{1-t^2}\right)}}$$

$$I_2(t) = \int \frac{\varphi_2(t)q(t)}{W(t)} dt = \int \frac{\sqrt{1-t^2}\frac{t}{1-t^2}}{-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}} dt = -\int t dt = \underline{\underline{-\frac{1}{2}t^2}}$$

$$\varphi_0(t) = \varphi_2(t)I_1(t) - \varphi_1(t)I_2(t) = -\sqrt{1-t^2} \cdot \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arcsin} t - t\sqrt{1-t^2}\right) - t\left(-\frac{1}{2}t^2\right) =$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}\left(t - \sqrt{1-t^2}\operatorname{Arcsin} t\right)}}$$

Solução Completa da Equação Inhomogênea, SCEiH:

$$x(t) = c_1 t + c_2\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\left(t - \sqrt{1-t^2}\operatorname{Arcsin} t\right), \ |t| < 1$$

(f) $t^2\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2t\dfrac{dx}{dt} + (t^2+2)x = t^3, \quad t \neq 0, \qquad \varphi_1(t) = t\sin t$

Gabarito: Para $t \neq 0$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{t}\frac{dx}{dt} + \left((1 + \frac{2}{t^2}\right)x = t$$

$$P_1(t) = \int p_1(t)dt = -\int \frac{2}{t} dt = \underline{\underline{-\log t^2}}$$

$$I(t) = \int \frac{1}{\varphi_1(t)^2} e^{-P_1(t)} dt = \int \frac{1}{t^2 \sin^2 t} t^2 \, dt = int \frac{1}{\sin^2 t} dt = \underline{\underline{-\cot t}}$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t)I(t) = -t \sin t \cot t = \cancel{-} \underline{\underline{t\cos t}}$$

Solução Completa da Equação Homogênea, SCEH:

$$x(t) = t\left(c_1 \sin t + c_2 \cos t\right), \ t \neq 0$$

Wronsky:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t\sin t & t\cos t \\ \cancel{\sin t} + t\cos t & \cancel{\cos t} - t\sin t \end{vmatrix} =$$

$$-t^2\sin^2 t - t^2\cos^2 t = \underline{\underline{-t^2}} \neq 0$$

Ie: φ_1, φ_2 linearmente independentes.

$$I_1(t) = \int \frac{\varphi_1(t)q(t)}{W(t)} dt = \int \frac{t\sin t \cdot t}{-t^2} dt = -\int \sin t \, dt = \underline{\underline{\cos t}}$$

$$I_2(t) = \int \frac{\varphi_2(t)q(t)}{W(t)} dt = \int \frac{t\cos t \cdot t}{-t^2} dt = -\int \cos t \, dt = \underline{\underline{-\sin t}}$$

$$\varphi_0(t) = \varphi_2(t)I_1(t) - \varphi_1(t)I_2(t) = t\cos t \cdot \cos t - t\sin t(-\sin t) =$$

$$\underline{\underline{t}}$$

Solução Completa da Equação Inhomogênea, SCEiH:

$$x(t) = x(t) = t\left(1 + c_1 \sin t + c_2 \cos t\right), \ t \neq 0$$

Para extender solução do $t < 0$ para $t > 0$, um cálculo identico ao do item d, mostrará, que isso somente é possivel com os mesmos contantes arbitrários, assim, podemos escrever $t \in \mathbb{R}$ na solução acima.

(g) $\sin t\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\cos t\dfrac{dx}{dt} - \sin tx = 0, \quad t \neq p\pi, \qquad \varphi_1(t) = \dfrac{1}{\sin t}$

Gabarito: Em intervalos da forma $p\pi < t < (p+1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\cot t\frac{dx}{dt} - x = 0$$

$$P_1(t) = \int p_1(t)dt = \int 2\cot t dt = \underline{\underline{\log \sin^2 t}}$$

$$I(t) = \int \frac{1}{\varphi_1(t)^2} e^{-P_1(t)} dt = \int \sin^2 t \frac{1}{\sin^2 t} \, dt = \int \, dt = \underline{\underline{t}}$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t)I(t) = \underline{\underline{\frac{t}{\sin t}}}$$

Solução Completa da Equação Homogênea, SCEH:

$$x(t) = \frac{c_1 + c_2 t}{\sin t}, \ t \neq p\pi$$

5.3 Considere uma EDO da forma:

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+a_1t\frac{dx}{dt}+a_0x=0,\quad t\in\mathbb{R}$$

Uma EDO deste tipo, é conhecido como um EDO de Euler (de segundo ordem).

Usando a substituição $u=\log t$ e $\varphi(t)=\psi(\log t)$, demonstre que em cada um dos intervalos, $t<0$ resp. $t>0$, a equação é equivalente à:

$$\frac{d^2x}{du^2}+(a_1-1)\frac{dx}{du}+a_0x=0,\quad u\in\mathbb{R}$$

Encontrar a solução completa das seguintes EDOs de Euler:

Gabarito: $u=\log t\Leftrightarrow t=e^u$ e $\varphi(t)=\psi(\log t)$:

$$\varphi'(t)=\frac{1}{t}\psi'(\log t),$$
$$\varphi''(t)=\frac{1}{t^2}\psi''(\log t)-\frac{1}{t^2}\psi'(\log t)$$

Inserindo:

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+a_1t\frac{dx}{dt}+a_0x=\psi''(\log t)-\psi'(\log t)+a_1\psi'(\log t)+a_0\psi(\log t)=$$
$$\psi''(\log t)+(a_1-1)\psi'(\log t)+a_0\psi(\log t)=0$$

Com $x(u)=\psi(\log t)$:

$$\frac{d^2x}{du^2}+(a_1-1)\frac{dx}{du}+a_0x=0$$

QED.

(a) $t^2\frac{d^2x}{dt^2}-3t\frac{dx}{dt}+3x=\frac{t^3}{1+t^2},\quad t>0$

Gabarito: Com $a_0=3$ e $a_1=-3$, a equação homogênea é:

$$\frac{d^2\psi}{du^2}-4\frac{d\psi}{du}+3\psi=0$$

$$P(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-2)^2-1=0\quad\Leftrightarrow\quad\lambda=2\pm1\quad\Leftrightarrow\quad\lambda=3\vee\lambda=1$$

SCEH em u:

$$\psi(u)=c_1e^{3u}+c_2e^u$$

Substituindo $u=\log t$:

$$x(t)=c_1t^3+c_2t,\ t\in\mathbb{R}$$

Normalizando, para $t\neq0$:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{3}{t}\frac{dx}{dt}+\frac{3}{t^2}x=\frac{t}{1+t^2}$$

Pomos $\varphi_1(t)=t^3$ e $\varphi_2(t)=t$. Wronsky:

$$W(t)=\begin{vmatrix}\varphi_1(t)&\varphi_2(t)\\\varphi_1'(t)&\varphi_2'(t)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t^3&t\\3t^2&1\end{vmatrix}=-2t^3\neq0$$

$$I_1(t)=\int\frac{\varphi_1(t)q(t)}{W(t)}dt=\int\frac{t^3\cdot\frac{t}{t^2+1}}{-2t^3}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{t}{1+t^2}dt=-\frac{1}{4}\log\left(1+t^2\right)$$
$$I_2(t)=\int\frac{\varphi_2(t)q(t)}{W(t)}dt=\int\frac{t\cdot\frac{t}{t^2+1}}{-2t^3}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{t}{t^2(1+t^2)}dt=$$
$$-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}\right)dt=-\frac{1}{2}\log t+\frac{1}{4}\log\left(1+t^2\right)$$

Solução particular:

$$\varphi_0(t)=\varphi_2(t)I_1(t)-\varphi_1(t)I_2(t)=-\frac{1}{4}t\log\left(1+t^2\right)-t^3\left(-\frac{1}{2}\log t+\frac{1}{4}\log\left(1+t^2\right)\right)=$$
$$-\frac{1}{4}t(1+t^2)\log\left(1+t^2\right)+\frac{1}{4}t^3\log t$$

O leito pode verificar, que com $\varphi(t)=t^3\log t$, $\varphi(t)$ e $\varphi'(t)$ tem limite para $t\to0$, porém $\varphi''(t)$ *não* tem. Assim, nenhuma solução pode ser continuada além do $t=0$.

(b) $t^2\frac{d^2x}{dt^2}-4t\frac{dx}{dt}+6x=6(\log t)^2+2\log t+4,\quad t>0$

Gabarito: A equação inhomogênea transforma em:

$$\frac{d^2\psi}{du^2}-5\frac{d\psi}{du}+6\psi=6u^2+2u+4$$

$$P(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)=0\quad\Leftrightarrow\quad\lambda=2\vee\lambda=3$$

SCEH:

$$x(u)=c_1e^{2t}+c_2e^{3t},\ t\in\mathbb{R}$$

Adivinhamos uma solução particular em u:

$$\varphi(u)=au^2+bu+c\quad\Rightarrow\quad\varphi'(u)=2au+b\quad\Rightarrow\quad\varphi''(u)=2a$$
$$\varphi''(u)-5\varphi'(u)+6\varphi(u)=2a-5\left(2au+b\right)+6\left(au^2+bu+c\right)=$$

$$6au^2+(6b-10a)u+2a-5b+6c:=6u^2+2u+4$$

Concluimos: $a=1$.

$$6b-10=2\quad\Leftrightarrow\quad b=2$$
$$6c+2-10=4\quad\Leftrightarrow\quad c=2$$

Assim, SCEiH:

$$\psi(u)=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}+u^2-2u+2$$

Substituindo de volta:

$$x(t)=c_1t^2+c_2t^3+(\log t)^2+2\log t+2,\ t>0$$

(c) $t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}-2t\dfrac{dx}{dt}+2x=2\operatorname{Arctan}t,\quad t>0$

Gabarito: A equação homogênea transforma em:

$$\frac{d^2\psi}{du^2}-3\frac{d\psi}{du}+2\psi=0$$

$$P(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-2)(\lambda-1)=0\quad\Leftrightarrow\quad\lambda=1\vee\lambda=2$$

SCEH:

$$\psi(u)=x(t)=c_1e^u+c_2e^{2u}=c_1t+c_2t^2:=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)$$

Wronsky:

$$W(t)=\begin{vmatrix}\varphi_1(t)&\varphi_2(t)\\\varphi_1'(t)&\varphi_2'(t)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t&t^2\\1&2t\end{vmatrix}=t^2\neq0$$

Normalizando:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{2}{t}\frac{dx}{dt}+\frac{2}{t^2}x=\frac{2}{t^2}\operatorname{Arctan}t$$

$$I_1(t)=\int\frac{\varphi_1(t)q(t)}{W(t)}dt=\int\frac{t\frac{2}{t^2}\operatorname{Arctan}t}{t^2}\,dt=2\int\frac{1}{t^3}\operatorname{Arctan}t\,dt=$$
$$-\frac{1}{t^2}+\int\frac{1}{t^2}\frac{1}{1+t^2}dt=-\frac{1}{t^2}+\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}-\operatorname{Arctan}t$$
$$I_2(t)=\int\frac{\varphi_2(t)q(t)}{W(t)}dt=\int\frac{t^2\frac{2}{t^2}\operatorname{Arctan}t}{t^2}\,dt=2\int\frac{1}{t^2}\operatorname{Arctan}t\,dt=$$
$$-\frac{2}{t}+2\int\frac{1}{t}\frac{1}{1+t^2}dt=-\frac{2}{t}+2\int t\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=-\frac{2}{t}+2\log t-\log(1+t^2)$$

Finalmente:

$$\varphi_0(t)=\varphi_2(t)I_1(t)-\varphi_1(t)I_2(t)=t^2\left(-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}-\operatorname{Arctan}t\right)-t\left(-\frac{2}{t}+2\log t-\log(1+t^2)\right)=$$

$$1-t-t^2\operatorname{Arctan}t-2t\log t+t\log(1+t^2)=1-t-t^2\operatorname{Arctan}t+t\log\frac{1+t^2}{t^2}$$

SCEiH:

$$x(t)=\underline{\underline{c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+1-t-t^2\operatorname{Arctan}t+t\log\frac{1+t^2}{t^2},\ t>0}}$$

5.4 Encontrar a solução completa da EDO:

$$t(t+1)\frac{d^2x}{dt^2}+(2-t^2)\frac{dx}{dt}-(2+t)x=(t+1)^2,\qquad t>0,$$

adivinhando uma função de potência como solução da equação homogênea.

Gabarito: Para $t>0$ a equação equivale:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{2-t^2}{t(t+1)}\frac{dx}{dt}-\frac{2+t}{t(t+1)}x=\frac{t+1}{t}$$

Adivinhamos, $t>0$:

$$\varphi_1(t)=t^\alpha$$

Derivando:

$$\varphi_1'(t)=\alpha t^{\alpha-1}$$
$$\varphi_1''(t)=\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$$

Inserindo:

$$t(t+1)\frac{d^2x}{dt^2}+(2-t^2)\frac{dx}{dt}-(2+t)x=$$
$$t(t+1)\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}+(2-t^2)\alpha t^{\alpha-1}-(2+t)t^\alpha=$$
$$\left(t(t+1)\alpha(\alpha-1)+(2-t^2)t\alpha-t^2(2-t)\right)t^{\alpha-2}=$$
$$\left(t^3(-\alpha+1)+t^2(\alpha(\alpha-1)+2)+t(\alpha(\alpha-1)+2)\right)t^{\alpha-2}=0\qquad\Leftrightarrow$$
$$-\alpha+1=0\quad\wedge\quad\alpha(\alpha-1)+2\quad\Leftrightarrow\quad\alpha=-1\quad\wedge\quad0=0\quad\Leftrightarrow\quad\alpha=-1$$

Ou seja, uma solução da equação homogêna é:

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{t}$$

Encontramos uma segunda solução da mesma:

$$p_1(t) = \frac{2-t^2}{t(t+1)} = \frac{2-t^2}{t^2+t} = -\frac{t^2+t-t-2}{t^2+t} = -1 + \frac{t+2}{t(t+1)}$$

Decompondo o último termo:

$$\frac{t+2}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad t+2 = a(t+1) + bt$$

Substituindo, $t = 0$ respectivamente $t = -1$:

$$2 = a \quad \wedge \quad 1 = -b$$

Isto é:

$$p_1(t) = -1 + \frac{2}{t} - \frac{1}{t+1}$$

Integrando:

$$P_1(t) = \int -1 + \frac{2}{t} - \frac{1}{t+1} dt = -t + \log t^2 - \log|t+1| = -t + \log\frac{t^2}{t+1}$$

E:

$$e^{-P_1(t)} = \frac{t+1}{t^2} e^t$$

Calculando:

$$\int \frac{e^{-P_1(t)}}{\varphi_1(t)^2} dt = \int \frac{t+1}{t^2} e^t \frac{1}{\frac{1}{t^2}} dt = \int (t+1)e^t dt = (t+1)e^t - \int 1 \cdot e^t dt = te^t$$

Assim:

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \int \frac{e^{-P_1(t)}}{\varphi_1(t)^2} dt = \frac{1}{t} \cdot te^t = e^t$$

Deixamos para o leitor verificar que $\varphi_2(t) = e^t$ de fato é solução da equação homogênea.
Solução completa da equação homogênea:

$$x(t) = \frac{c_1}{t} + c_2 e^t, \quad t > 0$$

Para encontrar uma solução particular da equação inhomogênea:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \frac{1}{t} & e^t \\ -\frac{1}{t^2} & e^t \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) e^t = \frac{t+1}{t^2} e^t$$

Formamos:

$$\frac{\varphi_1(t) q(t)}{W(t)} = \frac{1}{t} \frac{t+1}{t} \frac{t^2}{t+1} e^{-t} = e^{-t}$$

Integrando:

$$I_1(t) = \int \frac{\varphi_1(t) q(t)}{W(t)} dt = \int e^{-t} dt = -e^{-t}$$

E:

$$\frac{\varphi_2(t) q(t)}{W(t)} = e^t \frac{t+1}{t} \frac{t^2}{t+1} e^{-t} = t$$

Integrando:

$$I_2(t) = \int \frac{\varphi_2(t) q(t)}{W(t)} dt = \int t dt = \frac{1}{2} t^2$$

Obtemos uma solução particular da equação inhomogênea:

$$\varphi_0(t) == \varphi_2(t) I_1(t) - \varphi_1(t) I_2(t) = e^t(-e^{-t}) - \frac{1}{t}\frac{1}{2} t^2 = -1 - \frac{1}{2} t$$

Deixamos para o leitor verificar que $\varphi_0(t) = -1 - \frac{1}{2}t$ de fato é solução da equação inhomogênea. Solução completa da mesma, é:

$$x(t) = \frac{c_1}{t} + c_2 e^t - 1 - \frac{1}{2} t, \quad t > 0$$

5.5 Sabendo que tens soluções exponenciais, $\varphi_1(t) = e^{\alpha t}$, encontrar todas as soluções maximais das EDOs:

(a)
$$t(t+1)\frac{d^2x}{dt^2} + (2-t^2)\frac{dx}{dt} - (2+t)x = (t+1)^2, \qquad t > 0.$$

5.6 Sabendo que as equações homogêneas tens soluções polinomiais, encontrar todas as soluções maximais das EDOs:

(a) $(t-2)^2 \dfrac{d^2x}{dt^2} - (t^2 - 2t)\dfrac{dx}{dt} + tx = 0, \qquad t \neq 2,$

(b) $(t^2+4)\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2t\dfrac{dx}{dt} + 2x = 0, \qquad t \in \mathbb{R},$

(c) $(2t^3+t)\dfrac{d^2x}{dt^2} + (2t^2+3)t\dfrac{dx}{dt} - 8tx = 0, \qquad t \in \mathbb{R},$

(d) $\dfrac{1}{2}(t^2+1)\dfrac{d^2x}{dt^2} + t\dfrac{dx}{dt} - x = \operatorname{Arctan} t, \qquad t \in \mathbb{R}.$

(e) $(t^2+1)\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2t\dfrac{dx}{dt} - 2x = 4t^2 + 2, \qquad t \in \mathbb{R}.$

5.7 Sabendo que tens soluções potenciais, $\varphi_1(t) = t^\alpha$, encontrar todas as soluções maximais das EDOs:

(a) $2t^2\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3t\dfrac{dx}{dt} - x = 9t^2 + 5t\sqrt{t}; \qquad t > 0,$

5.8 Encontrar todas as soluções maximais das equações diferenciais:

(a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 6\dfrac{dx}{dt} + 9x = e^t\cos^2 t, \qquad t \in \mathbb{R}$

Gabarito:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda^2 - 3)^2$$

$\lambda = 3$ é raiz dupla. SCEH:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{3t},\ t \in \mathbb{R}$$

Escrevemos:

$$q(t) = e^t\cos^2 t = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^t\cos 2t$$

Advinho solução para equação inhomogênea:

$$z(t) = Ae^t + Be^{(1+2i)t}$$

$$\widehat{L}Ae^t = AP(1)e^t = 4Ae^t := \frac{1}{2}e^t \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{8}$$

$$\widehat{L}Be^{(1+2i)t} = BP(1+2i)e^{(1+2i)t} = (2-2i)^2Be^{(1+2i)t} = -8iBe^{(1+2i)t} := \frac{1}{2}e^{(1+2i)t} \quad \Leftrightarrow$$

$$B = \frac{-1}{16i} = \frac{1}{16}i$$

$$z(t) = \frac{1}{8}e^t + \frac{1}{16}ie^{(1+2i)t}$$

$$x_p(t) = Re(z) = \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{16}e^t\sin 2t$$

SCEiH:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{3t} + \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{16}e^t\sin 2t,\ t \in \mathbb{R}$$

(b) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + 2x = e^t\sin t, \qquad t \in \mathbb{R}$

Gabarito:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda^2 - 1)^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1 \pm i$$

SCEH:

$$x(t) = (c_1\cos t + c_2\sin t)e^t,\ t \in \mathbb{R}$$

Já que $e^t\sin t$ é solução da equação homogênea, adivinhamos:

$$z(t) = Ate^{(1+i)t}$$

$P'(\lambda) = 2\lambda - 2$:

$$\widehat{L}z = A\left\{P'(1+i) + P(1+i)t\right\}e^{(1+i)t} = AP'(1+i)e^{(1+i)t} = A\left(2(1+i) - 2\right)e^{(1+i)t} =$$

$$2iAe^{(1+i)t} := e^{(1+i)t} \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}ite^{(1+i)t} = -\frac{1}{2}te^t\left\{-\sin t + i\cos t\right\}$$

$$x(t) = Im(z) = \frac{1}{2}te^t\cos t$$

SCEiH:

$$x(t) = (c_1\cos t + c_2\sin t)e^t + \frac{1}{2}te^t\cos t,\ t \in \mathbb{R}$$

(c) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + x = 2\dfrac{e^t}{t^3}, \qquad t \neq 0$

Gabarito:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1$$

SCEH:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^t$$

Pondo $\varphi_1(t) = e^t$ e $\varphi_2(t) = te^t$:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (1+t)e^t \end{vmatrix} = (1+t)e^{2t} - te^{2t} = e^{2t} \neq 0$$

$$I_1(t) = \int \frac{\varphi_1(t)q(t)}{W(t)}dt = \int \frac{e^t\frac{e^t}{t^3}}{e^{2t}}dt = \int \frac{1}{t^3}dt = -\frac{1}{2t^2}$$

$$I_2(t) = \int \frac{\varphi_2(t)q(t)}{W(t)}dt = \int \frac{te^t\frac{e^t}{t^3}}{e^{2t}}dt = \int \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t}$$

$$\varphi_0(t) = \begin{vmatrix} I_1(t) & I_2(t) \\ \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \end{vmatrix} = -\frac{1}{2t^2}te^t + \frac{1}{t}e^t = \frac{1}{2t}e^t$$

SCEiH:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t + \frac{1}{2t})e^t,\ t \neq 0$$

Observamos que nenhuma solução pode ser extendida para $t = 0$.

(d) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x=-4\cos 2t, \qquad t\in\mathbb{R}$
Gabarito:

$$P(\lambda)=\lambda^2+4==0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=\pm 2i$$

SCEH:

$$x(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t,\ t\in\mathbb{R}$$
$$q(t)=-4\cos 2t=-4Re(e^{2it})$$

Já que e^{2it} é solução da equação homogênea, adivinhamos:

$$z(t)=Ate^{2it}$$

$P'(\lambda)=2\lambda$:

$$\widehat{L}Ate^{2it}=AP'(2i)e^{2it}=\cancel{4}iAe^{2it}:=-\cancel{4}e^{2it} \quad\Leftrightarrow\quad A=-\frac{1}{i}=i$$
$$z(t)=ite^{2it}=-t\sin 2t+it\cos 2t$$
$$x_p(t)=Re(z)=-t\sin 2t$$

SCEiH:

$$x(t)=c_1\cos 2t+(c_2+t)\sin 2t,\ t\in\mathbb{R}$$

(e) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-x=4te^t, \qquad t\in\mathbb{R}$
Gabarito:

$$P(\lambda)=\lambda^2-1==0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=\pm 1$$

SCEH:

$$x(t)=(c_1+c_2t)e^t,\ t\in\mathbb{R}$$

Já que tanto e^t e te^t são soluções da equação homogênea, adivinhamos:

$$x_p(t)=At^3e^t$$

Temos:

$$\widehat{L}At^3e^t=A\left(P'''(1)+3tP''(1)+3t^2P'(1)+t^3P(1)\right)e^t=$$
$$6Ate^t:=4te^t \quad\Leftrightarrow\quad A=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$
$$x_p(t)=\frac{2}{3}t^3e^t$$

SCEiH:

$$x(t)=(c_1+c_2t+\frac{2}{3}t^3)e^t,\ t\in\mathbb{R}$$

(f) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4\dfrac{dx}{dt}+5x=-2e^{-2t}\sin t, \qquad t\in\mathbb{R}$
Gabarito:

$$P(\lambda)=\lambda^2+4\lambda+5=(\lambda+2)^2+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=-2\pm i$$

SCEH:

$$x(t)=(c_1\cos t+c_2t\sin t)e^{-2t},\ t\in\mathbb{R}$$
$$q(t)=-2e^{-2t}\sin t=-2Im\left(e^{(-2+i)t}\right)$$
$$z(t)=Ate^{(-2+i)t}$$
$$\widehat{L}z=A(P'(-2+i)+tP(-2+i))e^{(-2+i)t}$$

$P'(\lambda)=2\lambda+4$:

$$\widehat{L}z=AP'(-2+i)e^{(-2+i)t}=A(2(-2+i)+4)e^{(-2+i)t}=2iAe^{(-2+i)t}:=-2e^{(-2+i)t} \quad\Leftrightarrow$$
$$A=\frac{1}{i}=-i$$
$$z(t)=-ite^{(-2+i)t}=-ite^{-2t}(\cos t+i\sin t)=te^{-2t}(\sin t-i\cos t)$$
$$x_p(t)=Re(z)=te^{-2t}\sin t$$

SCEiH:

$$x(t)=(c_1\cos t+(c_2+t)\sin t)\,e^{-2t},\ t\in\mathbb{R}$$

5.9 Encontrar todas as soluções maximais das EDOs:

(a) $\cosh t\dfrac{dx}{dt}+\sinh tx=3\cosh 2t,\ t\in\mathbb{R}$
Gabarito: Observe:

$$\cosh t\frac{dx}{dt}+\sinh tx=\frac{d}{dt}\cosh t\,x(t)=3\cosh 2t \quad\Rightarrow$$
$$\cosh t\,x(t)=\int 3\cosh 2t+c=\frac{3}{2}\sinh 2t+c \quad\Rightarrow$$
$$x(t)=\frac{\frac{3}{2}\sinh 2t+c}{\cosh t}=3\sinh t+\frac{c}{\cosh t},\ t\in\mathbb{R}$$

Alternativamente a equação é equivalente à ($\cosh t \neq 0$):

$$\frac{dx}{dt} + \tanh t x = 3\frac{\cosh 2t}{\cosh t}$$

$P(t) = \int P(t)dt = \int \tanh t\, dt = \log\cosh t$:

$$x(t) = e^{-P(t)}\left\{\int e^{P(t)}q(t)\,dt_c\right\} = \frac{3}{\cosh t}\left\{\int \cosh t\frac{\cosh 2t}{\cosh t}dt + c\right\} =$$

$$\frac{3}{\cosh t}\left\{\int \cosh 2t\, dt + c\right\} = \frac{3}{\cosh t}\left\{\frac{1}{2}\sinh 2t + c\right\} = \frac{3}{\cosh t}\left\{\sinh t\cosh t + c\right\} =$$

$$3\sinh t + \frac{c'}{\cosh t},\ t \in \mathbb{R}$$

(b) $\sin t\frac{d^2x}{dt^2} - \cos t\frac{dx}{dt} = 1,\ t \in \mathbb{R}$

Gabarito: Primeiro, considere a equação homeogênea:

$$\sin t\frac{d^2x}{dt^2} - \cos t\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dt}\cos t\frac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\cos t\frac{dx}{dt} = c_1$$

Quando $\cos t \neq 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + p\pi$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c_1}{\cos t}$$

$$x(t) = c_1 + c_2\int\frac{1}{\cos t}dt$$

$$\int\frac{1}{\cos t}dt = \int\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt = \int\frac{1}{1-u^2}du\bigg|_{u=\sin t} = \operatorname{Artanh} u|_{u=\sin t} =$$

$$\operatorname{Artanh}\sin t = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin t}{1-\sin t}$$

SCEH:

$$x(t) = c_1 + c_2\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin t}{1-\sin t}$$

Faltamos apenas *uma* solução da equação inhomogênea. Vemos que $x(t) = -\sin t$ é solução. Logo, SCEiH:

$$x(t) = c_1 + c_2\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin t}{1-\sin t} - \sin t$$

Alternativamente, calculando:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{Artanh}\sin t \\ 0 & \frac{1}{\cos t} \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos t}$$

$$I_1(t) = \int\frac{\varphi_1(t)q(t)}{W(t)}dt = \int\frac{1\cdot 1}{\frac{1}{\cos t}}dt = \int\cos t\, dt = \sin t$$

$$I_2(t) = \int\frac{\varphi_2(t)q(t)}{W(t)}dt = \int\frac{\operatorname{Artanh}\sin t\cdot 1}{\frac{1}{\cos t}}dt = \int\cos t\operatorname{Artanh}\sin t\, dt = \operatorname{Artanh} u\, du|_{u=\sin t}$$

$$\operatorname{Artanh} u\, du = u\operatorname{Artanh} u - \int u\cdot\frac{1}{1-u^2}du = u\operatorname{Artanh} u - \frac{1}{2}\log\left(1-u^2\right)$$

$$I_2(t) = \sin t\operatorname{Artanh}\sin t - \frac{1}{2}\log\left(1-\sin^2 t\right)$$

$$\varphi_0(t) = \varphi_2(t)I_1(t) - \varphi_1(t)I_2(t) = \cancel{\sin t\operatorname{Artanh}\sin t} - \left(\cancel{\sin t\operatorname{Artanh}\sin t} - \frac{1}{2}\log\left(1-\sin^2 t\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\log\left(1-\sin^2 t\right)$$

Sobre o integral, $\int\frac{1}{1-u^2}du$. Primeiro:

$$\frac{d\tanh x}{dx} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

Com $u = \tanh x \Leftrightarrow x = \operatorname{Artanh} u$:

$$\frac{du}{dx} = 1 - u^2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{1-u^2} \quad\Leftrightarrow\quad \int\frac{1}{1-u^2}dy = \operatorname{Artanh} u$$

No outro lado:

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right\}$$

$$\int\frac{1}{1-u^2}du = \int\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right\}du = \frac{1}{2}\left\{\log\left(1+u\right) - \log\left(1-u\right)\right\} = \frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u}$$

6 Séries de Potências e EDOs

Para alguns EDOs, particularmente do segundo ordem (tipicamente EDOs com coeficientes polinomiais): podemos encontrar soluções em forma de *séries de potências*:

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

onde x pertênce a um certo intervalo, *o intervalo de convergência*, $]-\lambda, \lambda[$. Mencionamos, que uma série de potência é *uniformamente convergente* no seu intervalo de convergência, isto é, podemos 'trocar somatório com derivação (integração)', ou seja:

$$y' = f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y'' = f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Mencionamos a função soma de umas séries de potências notáveis:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} = \cosh x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1$$

$$(1-x)^\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) x^n, \quad |x| < 1$$

Na última série, $\alpha \in \mathbb{R}$, aparece os coeficientes binomais generalizados:

$$\left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Destacamos que no intervalo de convergência:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

6.1 Exercícios:

6.1 Encontrar intervalo de convergência para cada uma das séries de potência abaixo:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} x^n$;

Gabarito:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} |x| = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n |x| \to 0 \cdot e|x| = 0, \ n \to +\infty$$

Raio de convergência: $\underline{\underline{\lambda = +\infty}}$. Alternativamente:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left| \frac{x}{n} \right| \to, \ n \to +\infty$$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{3^n} x^n$

Gabarito:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\log(n+1)}{3^{n+1}} \frac{3^n}{\log n} |x| = \frac{1}{3} \frac{\log(n+1)}{\log n} |x| \to \frac{1}{3}|x|, \ n \to +\infty$$

Raio de convergência: $\underline{\underline{\lambda = 3}}$.

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} [1-(-2)^n]\, x^n$;

Gabarito:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)^n}\, x\right| = \left|\frac{(-2)^{n+1}}{(-2)^n}\cdot\frac{(-2)^{-n-1}-1}{(-2)^{-n}-1}x\right| = 2\left|\frac{(-2)^{-n-1}-1}{(-2)^{-n}-1}x\right| \to 2|x|,\ n\to+\infty$$

Raio de convergência: $\underline{\underline{\lambda = \frac{1}{2}}}$.

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} x^{2n}$;

Gabarito:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{2n+2}n^2}{2^{2n}(n+1)^2}|x|^2 = 4\frac{n^2}{(n+1)^2}|x|^2 \to 4|x|^2,\ n\to+\infty$$

Raio de convergência: $\underline{\underline{\lambda = \frac{1}{2}}}$.

(e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^n} x^n$;

Gabarito:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+2)2^n}{2^{n+1}(n+1)}|x| = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}|x| \to \frac{1}{2}|x|,\ n\to+\infty$$

Raio de convergência: $\underline{\underline{\lambda = 2}}$.

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n}+1\right)^n x^{3n}$;

Gabarito: Notamos:

$$\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\log n} \to 1,\ n\to+\infty$$
$$\sqrt[n]{|a_n|} = (\sqrt[n]{n}+1)|x|^3 \to 2|x|^3,\ n\to+\infty$$

Raio de convergência: $\underline{\underline{\lambda = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}}}$.

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$;

Gabarito:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^n}|x| = (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}|x| \to +\infty,\ n\to+\infty$$

Raio de convergência: $\underline{\underline{\lambda = 0}}$.

(h) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^n+b^n} x^n, \quad a \geq b > 0$;

Gabarito:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}|x| = \frac{1}{a}\frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}|x| \to \frac{1}{a}|x|,\ n\to+\infty$$

Raio de convergência: $\underline{\underline{\lambda = a}}$.

(i) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n+1} x^n$;

Gabarito: Questão anterior, com $a = 2$ e $b = 1$. Raio de convergência: $\underline{\underline{\lambda = 2}}$.

(j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{2n} x^{2n}$;

Gabarito:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{2n+2}\cdot 2n}{2^{2n}\cdot 2(n+1)}|x|^2 = 4\frac{n+1}{n}|x|^2 \to 4|x|^2,\ n\to+\infty$$

Raio de convergência: $\underline{\underline{\lambda = \frac{1}{2}}}$.

(k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!^2} x^n$;

Gabarito:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n+2)!\cdot n!^2}{(2n!)\cdot(n+1)!^2}|x| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|x| \to 4|x|,\ n\to+\infty$$

Raio de convergência: $\underline{\underline{\lambda = \frac{1}{4}}}$.

(l) $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n^2} x^n$.

Gabarito:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{n^2}}{3^{(n+1)^2}}|x| = \frac{1}{3^{2n+1}}|x| \to 0,\ n\to+\infty$$

Raio de convergência: $\underline{\underline{\lambda = +\infty}}$.

6.2 Encontrar a série de potência e seu intervalo de convergência das seguintes funções:

(a) $f(x)=\cos^2 x$;
Gabarito:

$$f(x)=\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}=\underline{\underline{1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\ x\in\mathbb{R}}}$$

(b) $f(x)=\sinh^2 x$;
Gabarito:

$$f(x)=\sinh^2 x=\frac{1}{2}(\cosh 2x-1)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{}{(2n)!}(2x)^{2n}-\frac{1}{2}=\underline{\underline{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\ x\in\mathbb{R}}}$$

(c) $f(x)=\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;
Gabarito: Para $|x|<1$:

$$\log(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\quad\Rightarrow\quad\log(1+x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$$

$$f(x)=\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}(\log(1+x)-\log(1-x))=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-(-1)^n)\frac{x^n}{n}=\underline{\underline{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p+1}}{2p+1},\ |x|<1}}$$

Alternativamente:

$$\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{2n}\quad\Rightarrow$$

$$f(x)=\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\,dt=\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}t^{2n}\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x t^{2n}\,dt=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p+1}}{2p+1},\ |x|<1$$

(d) $f(x)=\frac{1}{2-x}$;
Gabarito:

$$f(x)=\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\underline{\underline{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}},\ |x|<2}}$$

(e) $f(x)=\frac{x}{1+x-2x^2}$;
Gabarito:

$$1-x-2x^2=(1-x)(2+1)\quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{1-x-2x^2}=\frac{x}{(1-x)(1+2x)}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+2x}\quad\Leftrightarrow$$

$$x=a(2x+1)+b(1-x)$$

$$x=1\quad\Rightarrow\quad 1=3a\quad\Leftrightarrow\quad a=\frac{1}{3}$$

$$x=-\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2}=-\frac{3b}{2}\quad\Leftrightarrow\quad b=-\frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}\right)=$$

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}(-2x)^n\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(1-(-2)^n)x^n,$$

onde $|x|<min(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.

$$f(x)=\frac{x}{1+x-2x^2}=\underline{\underline{-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(1-(2)^n)x^n,\ |x|<\frac{1}{2}}}$$

(f) $f(x)=\log(1+x)$;
Gabarito: Para $|x|<1$:

$$\log(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\quad\Rightarrow\quad\log(1+x)=\underline{\underline{-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n},\ |x|<1}}$$

(g) $f(x) = (1 + x^2)\log(1 + x)$;
Gabarito: Para $|x| < 1$:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \quad \Rightarrow$$

$$(1+x^2)\log(1+x) = (1+x^2)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{n+2}}{n} =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n-2} = \sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-2}\right)x^n =$$

$$\underline{\underline{x - \frac{x^2}{2} + 2\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n-1}{n(n-2)}x^n, \ |x| < 1}}$$

(h) $f(x) = \text{Arctan}\, x$;
Gabarito: Para $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} \quad \Rightarrow$$

$$f(x) = \text{Arctan}\, x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt =$$

$$\underline{\underline{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, |x| < 1}}$$

(i) $f(x) = \text{Arctan}\, x + \log\sqrt{1+x^2}$;
Gabarito: Para $|x| < 1$:

$$\text{Arctan}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \Rightarrow \quad \log(1+x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} \quad \Rightarrow$$

$$f(x) = \text{Arctan}\, x + \frac{1}{2}\log(1+x^2) = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} x^{2n} \ |x| < 1}}$$

6.3 Encontrar intervalo de convergência e função soma, das seguintes séries de potência:
Gabarito: Destacamos, que uma série de potência é *Uniformamente Convergente* no interior do seu intervalo de conbergência. Assim, podemos inverter derivação, respectivamente integração, e somatório.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$
Gabarito:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n - 1 = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \underline{\underline{-\frac{x^2}{1+x^2}, \ |x| < 1}}$$

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$;
Gabarito:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = x\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}x^n = x\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \underline{\underline{\frac{x}{(1-x)^2}, \ |x| < 1}}$$

(c) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)} x^n$;
Gabarito: Començamos com:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \ |x| < 1$$

Integrando:

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Isto é:

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \ |x| < 1$$

No mais:

$$\frac{1}{n(n-2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right)$$

Assim:

$$2\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n-2)}=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^n}{n-2}-\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{2}\frac{x^n}{n}=$$
$$x^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{x^2}{2}+x=$$
$$(x^2-1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{x^2}{2}+x=$$
$$(1-x^2)\log(1-x)+\frac{x^2}{2}+x$$

Então:

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n-2)}=\frac{1-x^2}{2}\log(1-x)+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}:=g(x)$$

Finalmente:

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n-2)}x^n=-g(-x)=\underline{\underline{\frac{x^2-1}{2}\log(1+x)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2},\ |x|<1}}$$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n}x^n$;

Gabarito:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(2x)^n=\underline{\underline{-\log(1-2x),\ |x|<\frac{1}{2}}}$$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n$;

Gabarito: Començamos com:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\ |x|<1\quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d}{dx}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^n$$

Isto é:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}-1,\ |x|<1$$

Substituindo x por $-x$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)(-1)^nx^n=\underline{\underline{\frac{1}{(1+x)^2}-1,\ |x|<1}}$$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-2)^n\frac{n+2}{n+1}x^n$;

Gabarito: Començamos com ($|x|<1$):

$$\log(1-x)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-x-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad\Leftrightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-x-\log(1-x)\quad\Rightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+1}=-x^2-x\log(1-x)\quad\Rightarrow$$
$$\frac{d}{dx}(x^2-x\log(1-x))=-2x-\log(1-x)+\frac{x}{1-x}=$$
$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d}{dx}\frac{x^{n+2}}{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{n+1}x^{n+1}=x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{n+1}x^n$$

Ou seja:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{n+1}x^n=\frac{1}{x}\cdot\left(-2x-\log(1-x)+\frac{x}{1-x}\right)=-2-\frac{1}{x}\log(1-x)+\frac{1}{1-x}$$

Substituindo x por $-2x$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-2)^n\frac{n+2}{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{n+1}(-2x)^n=\underline{\underline{-2-\frac{1}{2x}\log(1+2x)+\frac{1}{1+2x},\ |x|<1}}$$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)!} x^n$;

Gabarito: Sabemos ($x \in \mathbb{R}$):

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+3)!} = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{x^{n-3}}{n!} = \frac{1}{x^3} \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{x^3} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{3} \frac{x^n}{n!} \right) =$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{x^3} \left(e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1 \right), \; x \in \mathbb{R}}}$$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(2n+1)} x^{2n}$;

Gabarito: Sabemos ($x < 1$):

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-t^2)^n \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\text{Arctan}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} = \frac{1}{x} \text{Arctan}\, x \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} = \frac{1}{x} \text{Arctan}\, x - 1, \; |x| < 1$$

Substituindo x por $\frac{x}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(2n+1)} x^{2n} = \underline{\underline{\frac{2}{x} \text{Arctan}\, \frac{x}{2} - 1, \; |x| < 2}}$$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n$;

Gabarito: Para $|x/3| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n - 1 \right) =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{3}} - 1 \right) = \frac{1}{3} \frac{\frac{x}{3}}{1 - \frac{x}{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \cdot \frac{x}{3-x}, \; |x| < 3}}$$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$;

Gabarito: Para $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (-x)^n - 1 = \underline{\underline{e^{-x} - 1, \; x \in \mathbb{R}}}$$

(k) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} x^n$;

Gabarito: Para $\forall n \neq 0, 1, 2$:

$$\frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-1} + \frac{c}{n-2} \quad \Leftrightarrow$$

$$1 = a(n-1)(n-2) + bn(n-2) + cn(n-1)$$

Pondo $n = 0$: $a = \frac{1}{2}$, $n = 1$: $b = -1$, $n = 2$: $c = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2(n-2)}$$

Para $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \Rightarrow$$

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = -\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2}$$

Juntando os resultados:

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)} =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n-2} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{2} \frac{x^n}{n}\right) - x\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=2}^{2} \frac{x^{n-1}}{n-1}\right) + \frac{1}{2}x^2\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2} =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\log(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right) - x\left(-\log(1-x) - x\right) - \frac{1}{2}x^2\log(1-x) =$$

$$-\frac{1}{2}\left(x^2 - 2x - 1\right)\log(1-x) - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + x^2 =$$

$$\underline{\underline{-\frac{1}{2}(x-1)^2\log(1-x) - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2,\ |x| < 1}}$$

6.4 Dado a EDO:

$$(*):\quad \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2y = 0,$$

Gabarito:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2y =$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)a_n x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)\left((n+1)a_{n+2} - a_n\right)x^n = 0,\ n \in \mathbb{N}_0 \quad \Leftrightarrow$$

Fórmula de recursão:

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}_0$$

Ou:

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n-1},\ n > 1$$

Termos pares:

$$a_{2n} = \frac{a_{2n-2}}{2n-1} = \frac{a_{2n-4}}{(2n-1)(2n-3)} = \ldots = \frac{a_0}{(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 1}$$

Vemos:

$$(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 1 = \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{2n(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Inserindo:

$$a_{2n} = \frac{2^n n!}{(2n)!}a_0$$

Termos ímpares:

$$a_{2n+1} = \frac{a_{2n-1}}{2n} = \frac{a_{2n-3}}{2n(2n-2)} = \ldots = \frac{a_1}{2n(2n-2)\cdot\ldots\cdot 2} = \frac{a_1}{2^n n!}$$

Da fórmula de recursão segue que ambas as séries tem raio de convergência $\lambda = +\infty$. SCEH:

$$y(x) = a_0\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!}x^{2n} + a_1\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!}x^{2n+1}$$

(a) Encontrar em forma de uma série de potência a solução de $(*)$, passando pelo elemento de linha $(0,1,0)$.
Gabarito: $(x_0, y_0, y_0') = (0,1,0) = (0, a_0, a_1)$.

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!}x^{2n}\ x \in \mathbb{R}$$

(b) Encontrar em forma de uma série de potência a solução de $(*)$, passando pelo elemento de linha $(0,0,1)$.
Gabarito: $(x_0, y_0, y_0') = (0,0,1) = (0, a_0, a_1)$.

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!}x^{2n+1},\ x \in \mathbb{R}$$

(c) Encontrar intervalo de convergência e função soma da série da questão anterior.
Gabarito:

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!}x^{2n+1} = x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n = xe^{\frac{1}{2}x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

(d) Escreve a solução completa do $(*)$.
Gabarito:

$$y(x) = c_1 x e^{\frac{1}{2}x^2} + c_2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n},\ x \in \mathbb{R}$$

6.5 Dado a EDO:

$$(*) : \quad x\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

Gabarito:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n =$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_n x^n =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\left(n a_{n+1} + a_n\right) x^n + a_0 := 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$a_0 = 0 \wedge a_{n+1} = -\frac{a_n}{n},\ n > 0$$

$n > 1$:

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n-1} = \frac{a_{n-2}}{(n-1)(n-2)} = -\frac{a_{n-3}}{(n-1)(n-2)(n-3)} = \cdots =$$

$$(-1)^n \frac{a_1}{(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} a_1$$

(a) Encontrar em forma de uma série de potência a solução de $(*)$, passando pelo elemento de linha $(0, 0, 1)$.
Gabarito: $(0, 0, 1) = (x_0, a_0, a_1)$:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1} = -xe^{-x},\ x \in \mathbb{R}$$

(b) Encontrar intervalo de convergência e função soma da série do questão anterior.
Gabarito: Pela fórmula de recursão:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n} \to 0,\ n \to +\infty$$

Raio de convergência $\lambda = +\infty$.

(c) Qual séria a estratégia para encontrar a solução completa do $(*)$?
Gabarito:

$$y_2(x) = \int \frac{e^{-P(x)}}{y_1(x)^2} = \int \frac{e^{-x}}{x^2 e^{-2x}} dx = \int \frac{1}{x^2} e^x\, dx$$

6.6 Dado a EDO:

$$(*) : \quad (x - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

Gabarito:

$$(x - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} - y =$$

$$(x - x^2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 3x\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n =$$

$$(x - x^2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)a_n x^n =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)a_n x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + 3n + 1)a_n x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\left(n a_{n+1} - (n+1)a_n\right) x^n : 0 \quad \Leftrightarrow$$

Para $n = 0$: $0a_1 = a_0$, ou seja a_1 livre (arbitrário). Fórmula de recursão:

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n,\ n > 0$$

Recursivamente:

$$a_n = \frac{n}{n-1} a_{n-1} = \frac{n}{\cancel{n-1}} \frac{\cancel{n-1}}{n-2} a_{n-2} = \frac{n}{\cancel{n-2}} \frac{\cancel{n-2}}{n-3} a_{n-3} = \cdots = \frac{n}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{1} a_1 = n a_1$$

(a) Encontrar em forma de uma série de potência a solução de $(*)$, passando pelo elemento de linha $(0,0,1)$.
Gabarito:

$$y_1(x)=a_1\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n$$

(b) Encontrar intervalo de convergência e função soma da série do questão anterior.
Gabarito: Pela fórmula de recursão:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n+1}{n}\to 1,\ n\to+\infty$$

Raio de convergência $\lambda=1$. Função soma, para $|x|<1$:

$$y_1(x)=a_1\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n=a_1x\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=a_1x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}=a_1\frac{x}{(1-x)^2}$$

(c) Encontrar a solução completa do $(*)$ no intervalo $]-1,1[$.
Gabarito: Para $x\neq 0$ e $x\neq 1$:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{3}{1-x}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x(1-x)}y=0$$

Vemos, $p_1(x)=-\frac{3}{1-x}$:

$$P_1(x)=\int-\frac{3}{1-x}\,dx=\log{(1-x)^3}$$

$$y_2(x)=\int\frac{e^{-P_1(x)}}{y_1(x)^2}\,dx=\int\frac{(1-x)^{-3}}{\frac{x^2}{(1-x)^4}}\,dx=\int\frac{1-x}{x^2}\,dx=-\frac{1}{x}-\log{|x|}$$

6.7 Dado a EDO:

$$(*):\quad x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+4x^3y=0,$$

Gabarito:

$$\begin{aligned}
x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+4x^3y&=\\
x\sum_{n=1}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+4x^3\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n&=\\
\sum_{n=1}^{+\infty}(n(n-1)-n)a_nx^{n-1}+4\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+3}&=\\
\sum_{n=1}^{+\infty}n(n-2)a_nx^{n-1}+4\sum_{n=4}^{+\infty}a_{n-4}x^{n-1}&=\\
\sum_{n=1}^{3}n(n-2)a_nx^{n-1}+\sum_{n=4}^{+\infty}\left(n(n-2)a_n+a_{n-4}\right)x^{n-1}&=\\
-a_1+3a_3x^2+\sum_{n=4}^{+\infty}\left(n(n-2)a_n+a_{n-4}\right)x^{n-1}&=0
\end{aligned}$$

Concluimos:

$$a_1=a_3=0\wedge n(n-2)a_n+a_{n-4}=0,\ n\geq 4$$

Fórmula de recursão:

$$a_n=\frac{-4}{n(n-2)}a_{n-4},\ \geq 4$$

Pela condição:

$$a_1=0\quad\Rightarrow\quad a_{4p+1}=0,\ p\geq 0$$

E:

$$a_3=0\quad\Rightarrow\quad a_{4p+3}=0,\ p\geq 0$$

(a) Encontrar em forma de uma série de potência, a solução, $\varphi(x)$, de $(*)$, tal que: $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$ e $\varphi''(0)=2$.
Gabarito: $a_2=2$. Para $p\geq 0$:

$$a_{4p+2}=\frac{-4}{(4p+2)4p}a_{4p-2}=\frac{-1}{(2p+1)2p}a_{4p-2}$$

Recursivamente:

$$a_{4p+2}=\frac{-1}{(2p+1)2p}a_{4p-2}=\frac{1}{(2p+1)2p(2p-1)(2p-2)}a_{4p-2}=\ldots=$$
$$\frac{(-1)^p}{(2p+1)2p(2p-1)(2p-2)\cdot 3\cdot 2}a_2=\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}a_2$$

Então:

$$\varphi_1(x)=\underline{\underline{2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{4p+2}}}$$

(b) Encontrar intervalo de convergência e função soma da série do questão anterior.

Gabarito:

$$\varphi_1(x) = a_2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{4p+2} = \underline{\underline{2 \sin x^2, \ x \in \mathbb{R}}}$$

(c) Encontrar a solução completa do $(*)$.

Gabarito: Para $p > 0$:

$$a_{4p} = \frac{-4}{4p(4p-2)} a_{4p-4} = \frac{-1}{2p(2p-1)} a_{4p-4}$$

Recursivamente:

$$a_{4p} = \frac{-1}{2p(2p-1)} a_{4p-4} = \frac{1}{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)} a_{4p-8} = \cdots =$$

$$\frac{(-1)^p}{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)\cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2} a_0 = \frac{(-1)^p}{(2p)!} a_0$$

Então:

$$\varphi_2(x) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{4p} = a_0 \cos x^2, \ x \in \mathbb{R}$$

A solução completa do EDO:

$$\varphi(x) = \underline{\underline{c_1 \sin x^2 + c_2 \cos x^2, \ x \in \mathbb{R}}}$$